

MASTEROPPGAVE

Elevers strategier i problemløsning

Andreas Vigdal Elvestad og Jørgen Nord

16. mai 2022

Grunnskolelærerutdanning 5-10
Fakultet for lærerutdanninger og språk



Forord

Det femårige studieløpet vi nå har gjennomført har vært svært lærerikt. En lang periode med pandemi har preget studieløpet vårt. Undervisning over nett og hjemmeeksamen har til tider vært frustrerende, men også interessant. At alle disse årene nå kulminerer til en ferdig masteroppgave, kjennes både befriende og vemodig. Vi har lært mye om oss selv og hverandre. Etter lange skriveøkter med mye hardt arbeid, er vi stolte over å ha fullført en masterutdanning.

Først og fremst vil vi takke vår veileder gjennom denne perioden, Monica Nordbakke. Takk for alle konstruktive samtaler og tilbakemeldinger som har hjulpet oss til en ferdigstilt masteroppgave. Deretter vil vi også takke hverandre for det samarbeidet vi har hatt gjennom alle de fem årene på lektorutdanningen. Et samarbeid som har fungert svært godt og helt knirkefritt. I tillegg vil vi rette en takk til våre medstudenter Emil Tønnesen og Eirik Horvath som har gjort disse fem årene bedre. Spesielt under stressende tider som eksamensperioder og masterarbeid har dere bidratt med å holde motivasjonen vår oppe.

Uten informantene våre hadde forskningen vår ikke vært mulig å gjennomføre. Tusen takk elevene og læreren som har deltatt i forskningen vår!

Vi vil også rette en takk til venner og familie for støtte og tilrettelegging for oss. Vi har begge fått tid til å prioritere oppgaven, på bekostning av dere.

Nå gleder vi oss til å benytte oss av all den kunnskapen og alle erfaringene vi har opparbeidet oss gjennom disse fem årene. Vi ser frem til å bruke alt vi har lært ute i arbeidslivet.

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om hvilke løsningsstrategier åtte tiendeklassinger bruker i problemløsning, og hvordan de bidrar til å komme frem til løsninger. Studiens empiri bygger på elevenes besvarelser på tre problemløsningsoppgaver. I tillegg er det gjennomført et intervju med matematikklæreren til elevene. Det teoretiske rammeverket tar utgangspunkt i et konstruktivistisk læringsperspektiv. Gjennom Posamentier og Kruliks (2015) ti strategityper og SOLO taksonomi, analyseres elevenes valg av strategier og forståelsesnivå.

I gjennomgang av resultatene fant vi at elever bruker et bredt spekter av strategier i møte med ulike problemløsningsoppgaver. Likevel viser analysen at to strategityper ikke brukes av elevene i noen av problemene. Vi argumenterer for at disse strategiene bør vies mer tid i undervisning om problemløsningsstrategier. Noen strategier brukes uten å føre til tilfredsstillende løsninger. Her ser vi tydelige sammenhenger med elevenes forståelsesnivå. Elever med høyt forståelsesnivå mestrer å utnytte enkeltstrategier og kombinerer strategiene hensiktsmessig for å produsere tilfredsstillende løsninger.

Vår forskning tar for seg hvilke strategier elevene velger når de løser problemer, og hvordan strategiene bidrar i problemløsningsprosessen. Funnene fra forskningen vår tyder på at elevene bruker et bredt spekter av løsningsstrategier. Likevel drøfter vi potensielle begrensninger og implikasjoner ved studien, på bakgrunn av størrelsen på utvalget. Å generalisere ut fra et lite utvalg kan være problematisk. Det gjør seg også gjeldende i denne studien. Dette medfører at videre forskning på problemløsningsstrategier er nødvendig for å kunne danne et enda mer helhetlig bilde av hvordan tiendeklassinger løser problemer.

Summary

In this master thesis we have studied which problem solving strategies tenth graders use when solving problems, and how these strategies contribute to reaching solutions. The empirical study is based on students' answers to three problem solving tasks. In addition we have conducted an interview with their mathematics teacher. The theoretical framework is based on a constructivist learning perspective. Through Posamentier and Krulik's (2015) ten problem solving strategies and SOLO taxonomy, student's strategy choices and level of understanding is analyzed.

When reviewing the results we found that students use a broad spectrum of strategies when solving different problems. Nevertheless, the analysis shows that two types of strategies are not used by the students in any of the problems. We argue that these strategies should be given more attention when learning problem solving strategies. A few of the strategies are used without achieving any satisfying solutions. This is heavily connected to the student's level of understanding. Student's with a high level of understanding are able to use strategies and combine them conveniently to produce satisfying solutions.

Our research addresses which strategies student's use when solving problems, and how the strategies contribute to the problem solving process. The findings in our research indicate that the students use a broad spectrum of strategies. Nevertheless, we discuss potential limitations and implications of our study, based on the size of the sample. Generalizing from a small sample can be problematic. This is also true in our research. We consider that further research on problem solving strategies is necessary in order to form a more holistic picture of how tenth graders solve problems.

Innholdsfortegnelse

1.0 Innledning	8
1.1 Begrunnelse for valg av tema	8
1.2 Hvorfor problemløsning i skolen?	9
1.3 Problemformulering	10
1.4 Begrepsavklaring	11
1.4.1 Problemløsning	11
1.4.2 Løsningsstrategi	12
1.5 Oppgavens struktur	14
2.0 Teoretisk rammeverk	15
2.1 Tidligere forskning om problemløsning og løsningsstrategier	15
2.2 Konstruktivismen	17
2.2.1 Piagets induktive perspektiv	18
2.3 Problemløsningsstrategier	19
2.3.1 Logisk resonnement (LR)	20
2.3.2 Mønstergjenkjenning (MG)	21
2.3.3 Arbeide baklengs (AB)	21
2.3.4 Innta et annet perspektiv (IAP)	22
2.3.5 Vurdere ekstreme tilfeller (VET)	22
2.3.6 Løse et enklere problem (LEP)	22
2.3.7 Organisere data (OD)	23
2.3.8 Lage en visuell representasjon (LVR)	23
2.3.9 Redegjøre for alle muligheter (RAM)	23
2.3.10 Intelligent gjetting og testing (IGT)	24
2.4 SOLO taksonomi og forståelse	24
3.0 Metode	27
3.1 Datainnsamling	28
3.1.1 Enkelcasestudie	28
3.1.2 Intervju	29
3.1.3 Deltakende observasjon	30
3.2 Forskningsdesign	30
3.2.1 Problemløsningsoppgavene	31
3.3 Utvalg	35
3.4 Analyse av elevarbeider	35
3.4.1. Kategorier	37
3.5 Validitet og reliabilitet	39
3.6 Etske betraktninger	41
4.0 Analyse	43
4.1 Å telle kvadrater	43

4.1.1 Forståelsesnivåer	46
4.2 Bestefars tiere	49
4.2.1 Forståelsesnivåer	53
4.3 Mortens klinkekuler	57
4.3.1 Forståelsesnivåer	58
4.4 Oppsummering av problemløsningsoppgavene	62
4.5 Intervju	65
5.0 Diskusjon	68
5.1 Valg av strategier	68
5.1.1 Å telle kvadrater	68
5.1.2 Bestefars tiere	71
5.1.3 Mortens klinkekuler	71
5.2 Strategienes bidrag	72
5.2.1 Logisk resonnement (LR)	73
5.2.2 Mønstergjenkjenning (MG)	73
5.2.3 Arbeide baklengs (AB)	74
5.2.4 Innta et annet perspektiv (IAP)	75
5.2.5 Vurdere ekstreme tilfeller (VET)	75
5.2.6 Løse et enklere problem (LEP)	76
5.2.7 Organisere data (OD)	76
5.2.8 Lage en visuell representasjon (LVR)	77
5.2.9 Redegjøre for alle muligheter (RAM)	77
5.2.10 Intelligent gjetting og testing (IGT)	78
5.2.11 Tilfeldig gjetting og testing (TGT)	79
5.3 Elevenes forståelse	79
6.0 Konklusjon	82
6.1 Hvilke løsningsstrategier bruker tiendeklassinger i problemløsning?	82
6.2 Hvordan bidrar strategiene til å komme frem til løsninger?	83
7.0 Implikasjoner for videre forskning	84
8.0 Referanser	85
9.0 Vedlegg	89
9.1 Samtykkeskjema elev	89
9.2 Samtykkeskjema lærer	93
9.3 Intervjuguide	98
9.4 Oppgaveark	99

Oversikt over figurer

Figur 2.1.1: Deskriptiv modell av problemløsning	s. 16
Figur 2.4.1: SOLO taksonomi	s. 26
Figur 3.2.1.1: Problemet «Å telle kvadrater»	s. 32
Figur 3.2.1.2: Problemet «Bestefars tiere»	s. 33
Figur 3.2.1.3: Problemet «Mortens klinkekuler»	s. 34
Figur 3.4.1.1: Oversikt over kategorier i analysen	s. 39
Figur 4.1.1: Oversikt over løsningsstrategier i «Å telle kvadrater»	s. 44
Figur 4.1.2: Thomas teller kvadrater	s. 45
Figur 4.1.3: Turid organiserer data	s. 45
Figur 4.1.4: Oversikt over tilfredsstillende løsninger i «Å telle kvadrater»	s. 46
Figur 4.1.1.1: Forståelsesnivå MG i «Å telle kvadrater»	s. 47
Figur 4.1.1.2: Forståelsesnivå LVR i «Å telle kvadrater»	s. 48
Figur 4.1.1.3: Forståelsesnivå TGT i «Å telle kvadrater»	s. 49
Figur 4.2.1: Oversikt over løsningsstrategier i «Bestefars tiere»	s. 50
Figur 4.2.2: Alexandra bruker TGT	s. 51
Figur 4.2.3: Oversikt over tilfredsstillende løsninger i «Bestefars tiere»	s. 52
Figur 4.2.1.1: Forståelsesnivå LR i «Bestefars tiere»	s. 53
Figur 4.2.1.2: Forståelsesnivå OD i «Bestefars tiere»	s. 54
Figur 4.2.1.3: Morten organiserer data	s. 55
Figur 4.2.1.4: Forståelsesnivå IGT i «Bestefars tiere»	s. 56
Figur 4.2.1.5: Tuva forklarer IGT	s. 56
Figur 4.3.1: Oversikt over løsningsstrategier i «Mortens klinkekuler»	s. 57
Figur 4.3.2: Oversikt over tilfredsstillende løsninger i «Mortens klinkekuler»	s. 58
Figur 4.3.1.1: Forståelsesnivå AB i «Mortens klinkekuler»	s. 59
Figur 4.3.1.2: Tuva arbeider baklengs	s. 60
Figur 4.3.1.3: Thomas arbeider baklengs	s. 61
Figur 4.3.1.4: Forståelsesnivå IGT i «Mortens klinkekuler»	s. 61
Figur 4.3.1.5: Kai forklarer	s. 62
Figur 4.4.1: Oversikt over løsningsstrategier i alle problemene	s. 63
Figur 4.4.2: Oversikt over tilfredsstillende løsninger i alle problemene	s. 64

1.0 Innledning

Å vite noe om hvilke problemer mennesker møter i nær og fjern fremtid er en kompleks og nærmest umulig oppgave. Det betyr ikke nødvendigvis at det er umulig å predikere fremtiden, men den er likevel ukjent og usikker. I skolen forsøker vi å forberede elevene på de ulike utfordringene og problemene de kan møte senere i livet. I *Education 2030*-prosjektet presenteres hvilke kompetanser elever vil ha behov for i fremtidens 2030 (OECD, 2015; 2018). Blant disse er *kognitive kompetanser*, som for eksempel *problemløsning* og *kritisk tenkning* trukket frem som vesentlige. I analyser av tidligere læreplaner har det fremkommet mangler på konsistens mellom kompetansemålene og nøkkelkompetanser for fremtiden (Dale et al., 2011). Problemløsning kom tydelig fram i Mønsterplanen fra 1987 som et eget hovedemne (Olafsen & Maugesten, s. 47). I L97 står det blant annet at å løse problemer skal inngå i matematikk på alle nivåer. LK06 var preget av metodefrihet, og problemløsning hadde en sentral rolle i de grunnleggende ferdighetene regning og digitale ferdigheter (Olafsen & Maugesten, s. 48). Læreplanene har tydelig utviklet seg med økt fokus på problemløsning, som nå inngår i et av kjerneelementene i matematikk i LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2020a). I «Fagets relevans og sentrale verdier» står det at kritisk tenkning skal være med på å ruste elevene til å gjøre egne valg og ta stilling til viktige spørsmål, både i egne liv og i samfunnet (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Skolen skal bidra til at elevene utvikler en evne til å jobbe selvstendig, men også samarbeide med andre gjennom utforsking og problemløsning. Videre skal matematikkfaget «... *forberede elevene på et samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi dem kompetanse i utforsking og problemløsning*» (Utdanningsdirektoratet, 2020b). Å forberede elevene på fremtiden handler altså ikke om å forutse den, men heller å gi elevene kompetanse i å håndtere nye, ukjente og utfordrende problemer. Elevene skal bli dyktige problemløsere. På denne måten vil elevene være rustet til å møte fremtidens usikkerhet med nyttige kognitive kompetanser som verktøy.

1.1 Begrunnelse for valg av tema

Frank Lester og Diana Lambdin (2004, s. 189) argumenterer for at forskere ofte konkluderer med at problemløsning kan brukes som fartøy for å lære matematikk. Selv om dette er vel og bra poengterer de at det er viktig at forskningen ikke stopper her, men at det gjøres ytterligere bidrag for å tydeliggjøre for lærere *hvordan* matematikk kan læres gjennom problemløsning. Med vår forskning ønsker vi å oppnå økt kunnskap om, og erfaringer med løsningsstrategier i

problemløsning. En årsak til at elever sliter med problemløsning, er at de kun får undervisning i én strategi (Lester, 1996, s. 88). At lærere har kunnskap om, og underviser ulike problemløsningsstrategier er vesentlig for å utvikle elevenes kompetanse i problemløsning. Slik sett er det relevant at lærere får bredere innsikt i, og kunnskap om hvordan man kan arbeide med problemløsningsstrategier. Dermed er det også hensiktsmessig å bidra til å øke forskningsgrunnlaget innenfor problemløsning og problemløsningsstrategier.

I det tverrfaglige temaet «Folkehelse og livsmestring», står det at: «[Elevene skal lære] ... å håndtere medgang og motgang, og personlige og praktiske utfordringer på en best mulig måte» (Utdanningsdirektoratet, 2020c). Dette samsvarer med tankene til Lester og Lambdin (2004, s. 192) om at gode ferdigheter i problemløsning kan bidra til å gi elever ferdigheter i å håndtere personlige og praktiske utfordringer, også utenfor skolematematikken. Vi ser det som et samfunnsansvar for lærere å sørge for at elever utvikler tilstrekkelige strategier når de skal løse problemer eller utfordringer i livet. Ved å undersøke elevers bruk av løsningsstrategier, ønsker vi å sette et søkelys på hvilke strategier elevene benytter oftest og hvilke som bidrar til tilfredsstillende løsninger. På den måten kan det senere rettes et blikk mot hvilke strategier de har behov for å arbeide mer med, for å videreutvikle sin kompetanse i problemløsning.

Det nye kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» tar både for seg begrepene utforsking og problemløsning. Selv om det finnes mange likheter ved begrepene, er det viktig å skille de fra hverandre. Utforskende undervisning handler om at elevene finner svar på faglige spørsmål som gir kunnskap og innsikt (Säljö, 2013). Utforsking omhandler at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuteres seg fram til en felles forståelse (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Flere av de samme prinsippene finnes også i problemløsning, men her gjennomgår elevene en prosess for å løse et problem de ikke har løst før. Det er nettopp strategiene bestående av ulike metoder for å løse et problem på, som forskningen vår bygges rundt.

1.2 Hvorfor problemløsning i skolen?

Det finnes mange gode grunner til å bruke problemløsning mer aktivt i skolen. Først og fremst er problemløsning trukket frem som et kjerneelement i LK20, og legger dermed føringer for matematikkundervisningen i den norske skolen (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Lærere er

slik sett bundet til å legge vekt på problemløsning i undervisningen. Det er positivt at problemløsning i matematikk tildeles økt oppmerksomhet i skolen, blant annet fordi det å løse problemer i undervisningen er en arbeidsmetode som kan bidra til effektiv og langsiktig læring (Breiteig & Venheim, 2005, s. 235). Å løse problemer bidrar til å gi elevene dyp forståelse for matematiske konsepter (Lester & Lambdin, 2004, s. 191). Fokus på forståelse i matematikk er ikke et nytt fenomen. Skemp (1978) skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse, og argumenterer for at begge har en plass i matematikken. Med fokus på forståelse i matematikk, følger også en del positive ringvirkninger. Forståelse bidrar til økt motivasjon, økt minne, og ytterligere overføringskompetanse (Lester & Lambdin, 2004, s. 192-193). Matematisk forståelse beskrives ytterligere i teorikapittelet.

I kjerneelementet «Utforsking og problemløsning» presiseres det at elevene skal utvikle en metode for å løse et ukjent problem (Utdanningsdirektoratet, 2020a). Lester (1996, s. 87) har tidligere argumentert for at elever ikke får tilstrekkelig undervisning i løsningsstrategier i problemløsning. Elever som arbeider med løsningsstrategier i undervisningen blir bedre problemløsere (Torkildsen, 2017). Altså er det vesentlig at elever får tilstrekkelig støtte i å utforske og utvikle strategier som kan brukes for å løse problemer. Fordi problemer sjelden kan løses på kun én unik måte, er det viktig at man har kunnskap om flere strategier (Posamentier & Krulik, 2015, s. xvii). Kort fortalt kan en stor kunnskapsbank, med tilhørende relasjonell forståelse om løsningsstrategier gjøre elevene til dyktige problemløsere.

1.3 Problemformulering

Som beskrevet over er problemløsning en viktig kompetanse for fremtiden. I utgangspunktet var forskningen vår ment å være sentrert rundt elevenes problemløsningsprosess. Etter gjennomgang av ulik litteratur om problemløsning, så vi behovet for å gå nærmere inn på hvilke strategier elever bruker når de løser problemer. Selve problemstillingen vår har endret seg mange ganger. På et tidspunkt var problemstillingen: «Hvordan tilrettelegge for ytterligere arbeid med problemløsningsstrategier for elevene?». Med et slikt spørsmål er det naturlig å innta et lærerperspektiv for å tilrettelegge undervisning. Vi ønsker å forske på elever, og bestemte oss for å endre ordlyden. Ved hjelp av veileder og diskusjoner med hverandre, endret vi fokus fra tilrettelegging over til elevarbeider. Likevel har temaet i forskningen vår hele tiden vært problemløsning. Vi har også arbeidet med ulike forskningsspørsmål underveis, men konkluderte til slutt med at problemstillingen var

tilstrekkelig for å beskrive målet med forskningen vår. Problemstillingen i forskningen vår er derfor:

«Hvilke løsningsstrategier bruker tiendeklassinger i problemløsning, og hvordan bidrar strategiene til å komme frem til løsninger?»

I første del av problemstillingen søker vi kunnskap om hvilke strategier elever velger i møte med ulike problemer. Her trekker vi inn elevenes forståelse for hvordan man kan løse problemer. Den andre delen av problemstillingen stiller spørsmål ved hvordan strategiene hjelper elevene til å produsere løsninger. Her ligger fokuset på elevenes problemløsningsprosess og hvilken rolle strategiene har i prosessen. For å svare på problemstillingen har vi derfor valgt å analysere elevenes besvarelser i arbeid med problemløsningsoppgaver.

1.4 Begrepsavklaring

I begrepsavklaringen introduserer vi to nøkkelbegreper som blir gjennomgående i oppgaven. Disse utforskes og beskrives ytterligere ved hjelp av litteraturen for å danne et tydeligere bilde av hva vi mener når vi bruker begrepene.

1.4.1 Problemløsning

Å løse problemer ses på som en prosess, der problemløseren ikke umiddelbart vet løsningen eller svaret på problemet (Mason & Davis, 1991, s. 4; Bjuland, 2004, s. 219). Denne prosessen består av noen faser eller delprosesser, og er forsøkt beskrevet av flere teoretikere og forskere med ulike ordfattelser (Posamentier & Krulik, 2015, s. xvi). De fleste modeller baserer seg eller bygger videre på George Pólyas (2014) fire stegs-modell. Under følger de fire stegene med vår oversettelse av dem:

1. Forstå problemet (Understanding the problem)
2. Lage en plan (Devising a plan)
3. Gjennomføre planen (Carrying out the plan)
4. Se tilbake (Looking back)

I det første steget understrekes viktigheten av at problemløseren må forstå problemet for at det skal kunne løses. Pólya (2014) tar også for seg at det er avgjørende at problemløseren har lyst til å løse problemet. I denne fasen er det den som formulerer spørsmålene sin oppgave å formulere problemer som virker interessante for målgruppen. Det andre steget går ut på å lage en plan for å løse problemet. Pólya (2014) beskriver det som en mulig lang og vanskelig prosess, men samtidig veldig lærerik. Denne fasen kjennetegnes ofte ved at problemløserne får en idé som de tror er riktig, som de følger opp videre. Noen vil også kanskje trenge litt støtte til å komme igang med det ukjente problemet. Denne støtten kan gjøre seg gjeldende ved at man stiller spørsmål som: «Har du løst lignende problemer før?» eller «hva er det du skal finne ut av?» Det tredje steget er i følge Pólya (2014) lettere å gjennomføre enn å lage planen. Det som beskrives som de viktigste aspektene i dette steget er å huske planen man har laget, og å ha tålmodighet til å gjennomføre planen. Å «se tilbake» innebærer at man som problemløser ser tilbake på prosessen og arbeidet man har gjort. Dette steget er noe Pólya (2014) mener man ofte glemmer å gjennomføre i skolesammenheng.

Et vesentlig prinsipp ved problemløsning er at et *problem* er et dynamisk begrep, betinget av personen som skal løse det (Mason & Davis, 1991, s. 3). Et problem for én person, trenger ikke være et problem for en annen. Problemet kan være et spørsmål som er forvirrende eller vanskelig (Schoenfeld, 1992, s. 4; Lester & Lambdin, 2004, s. 192). Her kan blant annet alder, tidligere erfaring og matematisk kompetanse påvirke hva man anser til å være et problem. Bjuland (2004, s. 219) presiserer at det kun kan eksistere et problem dersom problemløseren ikke har tilgang til en metode, prosedyre eller algoritme som tilstrekkelig besvarer spørsmålet. Samtidig må problemløseren stå fritt i valg av løsningsstrategi/-er (Mason & Davis, 1991). Det betyr at dersom problemløseren har tilgang på en adekvat strategi for problemløsningsprosessen, så kan det ikke lenger anses å være et problem.

1.4.2 Løsningsstrategi

En strategi er en måte å *angripe* et problem på (Torkildsen, 2017, s. 5). Rent kronologisk kan problemet kun angripes etter å ha lest og bearbeidet spørsmålet (Mason et al., 2010, s. 24). Til forskjell fra Pólya, deler John Mason, Leone Burton og Kaye Stacey (2010) problemløsning i tre faser; «*Entry*», «*Attack*» og «*Review*». Begrepene er oversatt av oss til henholdsvis *inngang*, *angrep* og *vurdering*. Det legges vekt på at angrepsfasen ofte oppfattes som den viktigste, fordi det er her «selve matematikken» foregår, mens det i virkeligheten er inngangs-

og vurderingsfasen som danner grunnlaget for å kunne angripe problemet (Mason et al., 2010, s. 24-25). Inngangsfasen handler om å tilegne seg informasjon og finne essensen i spørsmålet (Mason et al., 2010, s. 26). Evnen til å velge hvordan man representerer problemet, avgjør hvilke muligheter man ser for å utvikle en strategi (Valenta, 2016). Angrepsfasen handler om å teste ut alle de forskjellige idéene man får og strategiene som utvikles i inngangsfasen (Mason et al., 2010, s. 35). Vurderingsfasen består av å vurdere løsningene når noe har gått galt, eller man ikke er tilstrekkelig fornøyd (Mason et al., 2010, s. 36). Pólya (2014) spesifiserer at det er i denne fasen - hvor man ser tilbake på prosessen og vurderer løsningen - at man har størst læringsutbytte. Den virkelige læringen skjer etter at man har løst et problem (Mason & Davis, 1991).

Evnen til å løse problemer er kompleks og sammensatt, og består av flere faktorer som er gjensidig avhengige av hverandre (Lester, 1996, s. 85). Deriblant trekkes kunnskap og anvendelse frem som essensielle. En særdeles viktig kunnskapstype er strategier, og hvordan man anvender strategier i arbeid med problemløsningen. Anvendelse innebærer blant annet å tenke fleksibelt i utviklingen, samt vurdere rimeligheten av en løsningsstrategi (Kilpatrick et al., 2001). «Elever som får eksplisitt undervisning i sentrale matematiske problemløsningsstrategier blir bedre problemløsere enn elevene som får tradisjonell undervisning» (Torkildsen, 2017, s. 5). Å arbeide med løsningsstrategier i problemløsning er altså vesentlig for å utvikle både elevenes matematiske kompetanse, og ferdigheter til å løse problemer.

Imidlertid virker det nødvendig å skille begrepene *problemløsningsstrategi* og *problemløsningsprosess* fra hverandre. En problemløsningsprosess omfatter i denne sammenheng hele prosessen fra inngang til løsning på et problem. Altså står begrepet for det samme som vi beskriver som problemløsning. Her forstått ved hjelp av Pólyas (2014) heuristiske modell og Mason, Burton og Staceys (2010) tre faser. En problemløsningsstrategi forstås som hvordan man gjennomfører de konkrete operasjonene eller handlingene når man angriper et problem. Man kan bruke flere ulike strategier samtidig, og disse utdypes videre i teoridelen (jf. 2.3).

1.5 Oppgavens struktur

Oppgaven vår er inndelt i ni kapitler. I innledningen redegjør vi for problemløsning som tematikk for forskningen vår, samt presenterer vi problemstilling og tilhørende begrepsavklaring (jf. 1.0). Deretter følger en gjennomgang av det teoretiske rammeverket, med tidligere forskning, det konstruktivistiske læringsperspektivet, problemløsningsstrategier og forståelsesnivåer i SOLO taksonomi (jf. 2.0). I metodekapittelet presenterer og drøfter vi ulike valg for forskningsmetode, -design og -strategi (jf. 3.0). Her diskuterer vi samtidig forskningens reliabilitet og validitet. Videre presenteres analysen med tilhørende funn (jf 4.0), før de drøftes og diskuteres i lys av det teoretiske rammeverket (jf 5.0). Etter diskusjonen følger en konklusjon, hvor vi forsøker å gi et svar på problemstillingen (jf. 6.0). Avslutningsvis presenterer vi noen implikasjoner for videre forskning (jf. 7.0). Referansene er listet i kapittel 8.0, og vedlegg følger i kapittel 9.0.

2.0 Teoretisk rammeverk

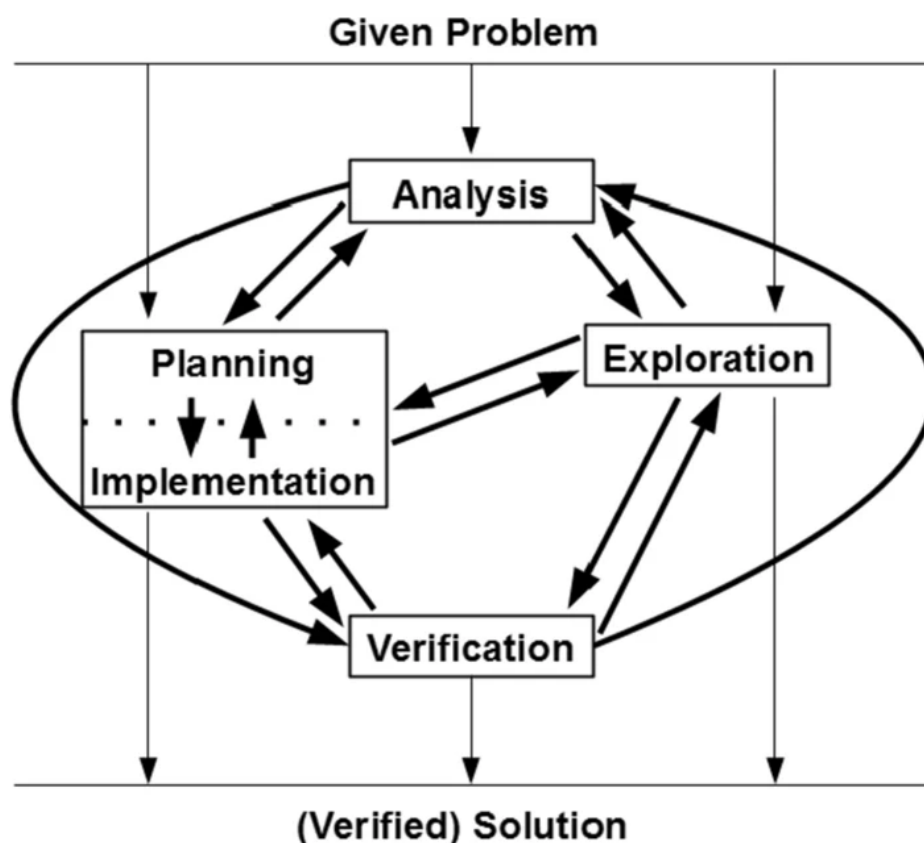
Å arbeide med problemløsning som helhet kan betraktes både som en individuell og/eller en samarbeidende prosess. Slik formuleringen av problemstillingen og forskningens design ser ut, gjør det naturlig å se problemløsning som en individuell prosess. Vi søker forståelse knyttet til elevers valg av løsningsstrategier og egne beslutninger i arbeid med problemer. Hvilke valg tar elevene når de beveger seg fra inngang til løsning av et problem? Elevenes valg underveis i problemløsningsprosessen kan stamme fra ulike kognitive elementer. Vi vil presentere det kognitive læringsperspektivet, nærmere bestemt konstruktivismen, som hjelp til å forklare elevers bruk og valg av problemløsningsstrategier. Først presenteres en gjennomgang av tidligere forskning om problemløsning. Videre følger en redegjørelse av det konstruktivistiske læringsperspektivet, samt en gjennomgang av problemløsningsstrategier.

2.1 Tidligere forskning om problemløsning og løsningsstrategier

Her tar vi for oss ulik forskning knyttet til problemløsning og problemløsningsstrategier. Innledningsvis vil vi trekke fram forskning om problemløsning, som vi mener er relevant for studien vår. Først vil vi forsøke å gjengi hva noe av den tidligere forskningen sier om elever og problemløsning. Deretter retter vi blikket problemløsningsstrategier, da dette er hovedfokuset vårt i forskningen.

Det finnes mange modeller som beskriver problemløsningsprosessen (Rott, 2012, s. 96). Pólya (2014) presenterte i 1945 en heuristisk modell for hvordan man kan løse problemer. Prosessen omfatter de fire stegene «forstå problemet», «lage en plan», «gjennomføre planen» og «se tilbake». Forskning om problemløsningsprosessen er tungt påvirket av Pólyas fire stegs-modell (Rott, 2012, s. 96). Andre modeller, som de normative modellene til Mason et al. (2010), Schoenfeld (1985) og Wilson et al. (1993) brukes hovedsakelig i undervisning for å hjelpe elever til å bli bedre problemløsere (Rott et al., 2021, s. 739). Forskningen viser likevel at å lære om problemløsningsprosessens faser gjør lite for å forbedre elevenes evne til å løse problemer (Lester, 1994, s. 666). Det er først når elevene får løse mange forskjellige typer problemer over lang tid, at deres problemløsningskompetanse utvikles. Det har god effekt når elever får mulighet til å prøve ut ulike strategier (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994). Rott et al. (2021, s. 737-739) argumenterer for at de normative modellene ikke er gode nok til å kunne analysere elevenes problemløsning, både fordi de er utformet med utgangspunkt i teori

og fordi de er for simple. Den virkelige problemløsningsprosessen er syklisk, inneholder feil og omveier, og følger ikke en forhåndsbestemt sekvens. Rott (2012, s. 112) beskriver på bakgrunn av forskning på elever i femte klasse, en deskriptiv modell av problemløsning (jf. figur 2.1.1). Oppsummert er forskning om problemløsning i stor grad situert rundt Pólyas (2014) modell, mens det i nyere tid har kommet til syne et økt behov for mer deskriptive modeller (Rott, 2021).



Figur 2.1.1: En deskriptiv modell av problemløsning (Rott, 2012, s. 106). Pilene står for eksplisitte og implisitte valg i løpet av prosessen.

En grunn til at elever har vansker med å løse problemer er at de ikke får mulighet til å lære hvordan man anvender ulike problemløsningsstrategier (Lester, 1996). Generelt sett har det i norsk skolesammenheng vært lite fokus på systematisk arbeid med strategier for problemløsning (Torkildsen, 2017, s. 4). Problemer har sjelden kun én unik løsning, og derfor er det vesentlig at elever mestrer å anvende mange strategier (Posamentier & Krulik, 2015, s. xvii). Flere forskere og teoretikere har tidligere presentert ulike sett med strategier. Noen eksempler er heuristiske strategier som beskrevet av Pólya (2014) og Schoenfeld (1985). Andre kan være mer spesifikke strategier, som beskrevet av eksempelvis Larson (1983),

Lester (1996) og Posamentier og Krulik (2015). Å lære *om* problemløsningsstrategier har vist seg å ha liten effekt på elevenes utvikling av ferdigheter i problemløsning (Lester, 1994, s. 666). Det antydes heller at fokuset bør være å lære hvordan man *anvender* problemløsningsstrategier (Lester, 1996). Som tidligere beskrevet, er det vesentlig at elevene får tid til å prøve ut ulike strategier i møte med mange problemer (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994). Det er på denne måten elevene utvikler ferdigheter i problemløsning.

I norsk sammenheng har Karlsen (2017) forsket på hvilke løsningsstrategier tiendeklassinger benyttet seg av i arbeid med tre problemløsningsoppgaver. Med utgangspunkt i et rammeverk med ni problemløsningsstrategier analyserte hun elevenes strategibruk. Karlsens (2017, s. 77) resultater viser at elevene bruker et bredt spekter av løsningsstrategier. Samtidig poengteres det at hun i forskningen oppdaget en del strategibruk som ikke var hensiktsmessig. En studie gjennomført ved en skole i Thailand i 2010 viser at elever klarer å bruke samtlige strategityper i deres rammeverk (Intaros et al., 2014). Schoenfeld (1992, s. 21) viser til funn som antyder at elever ikke velger strategier på en gunstig måte. Altså viser resultater fra forskning på elevers bruk av problemløsningsstrategier hovedsakelig at de bruker et bredt spekter av strategier når de løser problemer, uavhengig av om valgene deres er hensiktsmessige.

2.2 Konstruktivismen

I følge Skaalvik & Skaalvik (2013, s. 29) betraktes de kognitive læringsperspektivene som prosesser hvor kunnskap, persepsjon, tolkning, oppfatning og forventning er sentrale begreper. Et kognitivt læringsperspektiv fokuserer på de mentale prosessene; hvordan informasjon mottas og bearbeides, og hvordan kunnskap dannes og bearbeides mentalt (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 52). Det finnes flere ulike varianter av kognitive læringsperspektiver, hvor vi videre vil utdype *konstruktivisme* nærmere. Konstruktivismen bygger på en idé om at elevene konstruerer sin egen kunnskap (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57). Wilson et al. (1993, s. 57) poengterer at konstruktivistiske teorier har fått mer aksept innenfor problemløsning og matematikk generelt. Som nevnt må elevene være aktivt involvert i å konstruere sin egen kunnskap, framfor å motta den passivt. I underkapitlene nedenfor vil vi ta for oss et perspektiv innenfor konstruktivismen, og se hvordan dette kan knyttes opp mot problemløsning i matematikk.

2.2.1 Piagets induktive perspektiv

Ifølge Jean Piaget (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57) har mennesker to grunnleggende tendenser innenfor tankeprosessene knyttet til konstruktivismen. Han tar for seg tendensen til *organisering* «hvor man kan kombinere, ordne, rekombinere og reorganisere tanker og atferd i strukturer eller kategorier», og tendensen til *adaptasjon* ved at man tilpasser seg etter omgivelsene (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57). Erfaringene man får ved å arbeide innenfor dette perspektivet vil i henhold til Piagets tanker bli lagret som mentale representasjoner. Disse mentale representasjonene vil igjen bli knyttet til hverandre i nettverk som kalles kunnskapsstrukturer. Nettverkene omtaler Piaget som *skjemaer*, som er utgangspunktet for at man skal kunne utvikle seg innenfor tenkning, spesielt objekter og situasjoner som fortsatt ikke har forekommet.

Når man tilpasser seg omgivelsene fortolker man nye erfaringer i tråd med de allerede etablerte kunnskapsstrukturene (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 58). Denne tilpasningen er en helt grunnleggende tanke i Piagets perspektiv, og vil hele tiden bli regulert av to prosesser i samspillet med virkeligheten; *assimilasjon* og *akkomodasjon* (Saljö, 2001, s. 61).

Assimilasjon innebærer at man tar inn og oppfatter hvordan verden opptrer, og registrerer dette i de mentale skjemaene man har opparbeidet seg. Akkomodasjon innebærer at man ser virkeligheten på en annen måte enn tidligere. Dette kan vise seg innenfor problemløsning, dersom man eksempelvis deler opp et problem og rekombinerer delene på nye måter (Pólya, 2014, s. 76). Da kan man se problemet fra nye perspektiver som kan hjelpe til å løse problemet. En slik type erfaring vil medføre at man får utviklet nye kognitive skjemaer som tillater disse endringene (Saljö, 2001, s. 61). Som beskrevet i kapittel 1.4.1, er problemløsning en prosess som innebærer å løse et problem man ikke umiddelbart vet hvordan kan løses. Altså vil man sett i lys av Piagets induktive perspektiv kunne arbeide kontinuerlig med å plassere nye erfaringer i disse mentale skjemaene. Problemløsning handler derfor utelukkende om å arbeide med nye erfaringer og ukjente problemer. Man kan trekke paralleller mellom hvordan kunnskap bearbeides og skapes innenfor Piagets perspektiv, og hvordan det læring skjer innenfor problemløsning. Gjennom akkomodasjon arbeider man med å knytte nye erfaringer opp mot tidligere erfaringer. Det er nettopp dette som er noe av essensen i problemløsning, ved at man støter på et ukjent problem. Problemløseren må da bruke tidligere

kunnskap og erfaringer for å utarbeide en framgangsmåte for å løse problemet man står ovenfor.

2.3 Problemløsningsstrategier

Selve essensen i problemløsningsprosessen ligger i å velge en passende strategi (Posamentier & Krulik, 2015, s. xvi). Som nevnt har flere forskere og teoretikere tidligere presentert ulike sett med strategier, uten nødvendigvis å presisere hvor mange som faktisk eksisterer (se for eksempel Lester, 1996; Posamentier & Krulik, 2015; Larson, 1983; Torkildsen, 2017). Å avgjøre hvor mange og hvilke strategier som finnes ligger foreløpig utenfor vår rekkevidde. Tvert imot foreligger et potensiale for at det skal finnes et uendelig antall strategier - enten de går dypere i detalj eller de ikke er oppdaget enda. Posamentier og Krulik (2015, s. xvi) argumenterer for at det som regel finnes tydelige likhetstrekk mellom de ulike settene med strategier. De er muligens ikke navngitt likt, men omfatter vanligvis mange av de samme elementene. Som verktøy i analysen velger vi således å ta utgangspunkt i ti strategier Posamentier & Krulik (2015) anser som de mest verdifulle. Selv om vi tar utgangspunkt i disse strategiene, velger vi likevel å fylle på med annen teori for å dekke begrepene ytterligere. Videre omtaler vi strategiene som Posamentier og Kruliks (2015) ti strategityper. Strategiene er navngitt på følgende måte (med vår oversettelse):

1. Logisk resonnement (*Logical reasoning*)
2. Mønstergjenkjenning (*Pattern recognition*)
3. Arbeide baklengs (*Working backwards*)
4. Inn ta et annet perspektiv (*Adopting a different point of view*)
5. Vurdere ekstreme tilfeller (*Considering extreme cases*)
6. Løse et enklere problem (*Solving a simpler analogous problem*)
7. Organisere data (*Organizing data*)
8. Lage en visuell representasjon (*Making a drawing or visual representation*)
9. Redegjøre for alle muligheter (*Accounting for all possibilities*)
10. Intelligent gjetting og testing (*Intelligent guessing and testing*)

Videre følger en redegjørelse av hver enkel løsningsstrategi.

2.3.1 Logisk resonnement (LR)

Posamentier og Krulik (2015, s. 1) beskriver logisk resonnement (LR) som en måte å generere en rekke med utsagn som skal lede til en konklusjon. Her er det viktig å kunne argumentere godt, og samtidig forstå hvordan et utsagn kan lede til et annet. Ofte brukes denne strategien for å forenkle fremgangsmåten i problemet. En viss form for LR vil gjennomsyre samtlige løsningsstrategier som videre presenteres (Posamentier & Krulik, 2015, s. 1). LR anses dermed som den absolutt viktigste strategien å utvikle ferdigheter i og kunnskap om.

Bronkhorst et al. (2020, s. 1676) kombinerer teori om formelle og uformelle metoder for å definere LR på følgende måte:

«... selecting and interpreting information from a given context, making connections and verifying and drawing conclusions based on provided and interpreted information and the associated rules and processes».

Oppsummert handler LR om å trekke ut informasjon, koble den sammen og lage konklusjoner basert på denne informasjonen. Altså handler ikke LR nødvendigvis kun om å generere rekker med logiske utsagn, slik Posamentier og Krulik (2015) beskriver. Det skal også tas hensyn til tolkning av informasjon og å kunne lage forbindelser mellom konklusjoner.

For å forklare ytterligere hva vi mener med LR, har vi hentet et problem fra Posamentier og Krulik (2015, s. 9) som eksempel. Problemet er som følger: «Det minste tallet som er delelig med alle de ni første naturlige tallene er 2520. Hva er det minste tallet som er delelig med de 13 første naturlige tallene?» Selv om det er mulig å løse problemet simpelthen ved å telle de 13 første naturlige tallene og multiplisere de, er det tidsbesparende å benytte seg av LR som strategi, for eksempel slik:

Trekke ut og tolke informasjon: Vi vet at 2520 er delelig med tallene 1-9.

Logisk utsagn: Ettersom 10 og 12 består av respektive faktorer $2 \cdot 5$ og $3 \cdot 4$, behøver vi ikke ta de med i beregningen.

Konklusjon: Om vi kobler sammen de logiske utsagnene kan vi si at $2520 \cdot 11 \cdot 13 = 360360$ må være det minste tallet som er delelig med de 13 første naturlige tallene.

2.3.2 Mønstergjenkjenning (MG)

En av matematikkens store bruksområder handler om å forutsi noe som skjer på en regelmessig måte (Posamentier & Krulik, 2015, s. 13). Mønstergjenkjenning (MG) handler om nettopp det å kjenne igjen et mønster i et sett med eksempler. Et mønster er enhver forutsigbar regelmessighet som inneholder antall, rom, målinger eller strukturer (Mulligan et al., 2011, s. 548). Hvis man klarer å finne mønsteret kan man bruke den nye informasjonen til å beskrive regelmessighetene på en mer tilgjengelig måte (Posamentier & Krulik, 2015, s. 13). Det kan være vanskelig å forstå hvor viktig denne strategien er, uten selv å oppleve hvordan den kan brukes i en problemsituasjon. Torkildsen (2017) poengterer at det å lete etter mønster ofte kombineres med andre strategier. MG er på samme måte som logisk resonnement (LR) en strategi som preger flere av de andre strategiene. Å finne mønster kan betraktes som et mål når man benytter seg av enkelte av de andre strategiene. Oppsummert handler MG i stor grad om å oppdage gjentakende regelmessigheter, samt hvordan man representerer og beskriver regelmessighetene.

2.3.3 Arbeide baklengs (AB)

Når vi arbeider baklengs (AB) starter vi som regel med løsningen på problemet, og derfra reverserer vi operasjonene som trengs for å komme frem til løsningen (Posamentier & Krulik, 2015, s. 29). Den generelle strukturen som ligger til grunn for å arbeide baklengs (AB) handler om nettopp å jobbe seg fra en konklusjon til premissene for konklusjonen (Croy, 2000, s. 174-175). Croy (2000, s. 174-175) beskriver det som finne veien fra startpunktet A til endepunktet Z. En enklere måte å komme seg til Z på er ved først å finne veien til Y. Fra Y er det en åpenbar vei til Z. Om veien fra A til Y ikke er åpenbar, må man finne ut hvordan man kommer seg til X. Man fortsetter prosedyren helt til man har en klar og tydelig vei fra A til Z. Hvert steg blir til nye delmål i prosessen. Om man glemmer et steg eller ikke følger premissene i problemet, kan man heller ikke rettferdiggjøre løsningen (Croy, 2000, s. 175). Torkildsen (2017) omtaler strategien som hensiktsmessig å bruke når utgangspunktet i problemet er ukjent. Han beskriver hvordan metoden kan komme til uttrykk ved hjelp av et eksempel; man har en ukjent mengde klinkekuler, hvor det oppstår ulike hendelser som gjør at antallet klinkekuler endrer seg. Spørsmålet i problemet er hvor mange klinkekuler man

starter med. Denne type problem legger helt spesifikt opp til at å arbeide baklengs (AB) er den mest hensiktsmessige strategien.

2.3.4 Innta et annet perspektiv (IAP)

Denne strategien brukes best for å unngå frustrerende situasjoner der man ikke opplever noen fremgang i problemløsningsprosessen (Posamentier & Krulik, 2015, s. 45). Den kan også brukes tidsbesparende for å effektivisere prosessen. Å innta et annet perspektiv (IAP) handler om å finne en ny synsvinkel som kan hjelpe til å utelukke irrelevante elementer ved problemet. Pólya (2014, s. 76) poengterer at ved å dekomponere og rekombinere elementer i et problem, kan vi oppdage en ny helhet. Mer spesifikt kan man aktivt forsøke å rekombinere problemet på en mer tilgjengelig måte. På denne måten inntar man et annet perspektiv for å finne en mer hensiktsmessig tilnærming til å forstå problemet.

2.3.5 Vurdere ekstreme tilfeller (VET)

«Hva er det verste som kan skje?» er et godt eksempel på noe mennesker sier for å avgjøre hvilke valg som bør tas når vi står overfor et problem (Posamentier & Krulik, 2015, s. 65). Dette er en måte å vurdere ekstreme tilfeller (VET) på, som kan være til hjelp for å avgjøre hvilke scenarioer som er mest ekstreme (Posamentier & Krulik, 2015, s. 66). I starten av problemløsningsfasen kan det være nødvendig å utforske hvordan problemet vil se ut med ekstreme parametere (Larson, 1983, s. 50). Om man vurderer ekstreme tilfeller (VET) krever det likevel en forsiktig tilnærming til variabler som kan påvirke andre variabler eller endre problemet i sin helhet (Posamentier & Krulik, 2015, s. 66-67). Eksempler på bruk av denne strategien kan være der man leter etter færrest, størst, flest, kortest eller lengst mulig av noe.

2.3.6 Løse et enklere problem (LEP)

Problemer kan være komplekse, forvirrende eller inneholde mye informasjon, som gjør det vanskelig å vite hvor man skal begynne for å løse det (Posamentier & Krulik, 2015, s. 83). Ved å løse en enklere form av problemet (LEP) uten å endre dets originale innhold, kan problemløseren gjøre det mer tilgjengelig og oppnå ny innsikt i hvordan man kan angripe det originale problemet (Posamentier & Krulik, 2015, s. 83). Man kan dele opp problemet og løse de simple delene først, før man gradvis løser vanskeligere deler av problemet. Pólya (2014, s. 76-77) spesifiserer at er viktig å dele opp for å undersøke delene hver for seg. Spesielt kan det være nyttig dersom problemet er utfordrende for problemløseren. Larson (1983, s. 36)

navngir en lignende strategi som «divide into cases», hvor man deler opp problemet i mindre underproblemer med delmål som kan løses separat. Idéene bak strategien baseres på at hvis man ikke klarer å løse et problem så løser man et enklere, mer tilgjengelig problem. Vi tar utgangspunkt i at Posamentier og Krulik (2015) og Larson (1983) snakker om to sider av samme sak, og ser derfor strategiene som den samme.

2.3.7 Organisere data (OD)

Å organisere er som regel noe vi mennesker gjør helt automatisk, enten vi lager handlelister, rydder ut av oppvaskmaskinen eller sorterer noe vilkårlig etter kategorier (Posamentier & Krulik, 2015, s. 97). I følge Piaget organiserer mennesker gjennom å kombinere, ordne, rekombinere og reorganisere tanker i strukturer eller kategorier (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57). Noen ganger kan problemer inneholde data som er organisert på en måte som forvirrer problemløseren. Da er det nødvendig å sortere informasjonen i kategorier slik at man får oversikt over problemet (Posamentier & Krulik, 2015, s. 97). Her understrekes viktigheten av det å lære seg å organisere på en meningsfull måte, slik at dataen i problemet kan forstås ytterligere.

2.3.8 Lage en visuell representasjon (LVR)

I arbeid med problemer om spesifikke geometriske figurer kan det være nødvendig å tegne opp en visuell representasjon (LVR) som er til hjelp for å løse det (Posamentier & Krulik, 2015, s. 115). Selv om ikke alle problemer eksplisitt krever visuelle representasjoner for å løses, vil det å kunne se det som skal vurderes være til hjelp for å forstå premissene. En av styrkene ved å bruke denne strategien kommer frem når elever tegner matematiske løsninger på problemer utenfor matematiske konsepter de har lært om (Crespo & Kyriakides, 2007, s. 118). Likevel er en svakhet ved strategien at noen elever også bruker den i problemer hvor det er svært lite effektivt og hensiktsmessig. Larson (1983, s. 9) spesifiserer at en visuell representasjon kan gjøre det enklere å assimilere den relevante informasjonen og oppdage nye sammenhenger og avhengigheter.

2.3.9 Redegjøre for alle muligheter (RAM)

Å vedkjenne at det kan eksistere flere årsaker til et problem, og redegjøre for samtlige muligheter (RAM) er en vesentlig del av denne strategien (Posamentier & Krulik, 2015, s. 131). Når man bruker RAM konstruerer man gjerne en uttømmende liste som gjør det mulig å

undersøke alle muligheter på en systematisk måte. Strategien kan minne om OD fordi RAM i stor grad inkluderer en form for organisering. Likevel ligger den store forskjellen mellom strategiene i hva som organiseres. Når man organiserer data (OD) er det som regel informasjonen som umiddelbart finnes i problemet som organiseres. Når man bruker RAM er det de ulike mulighetene for løsningsalternativer som organiseres. Adair (2007, s. 29) spesifiserer at det er viktig å ha et åpent sinn og et vidt perspektiv når man skal vurdere alle muligheter. Det er først da de mest hensiktsmessige løsningsforslagene vil vise seg.

2.3.10 Intelligent gjetting og testing (IGT)

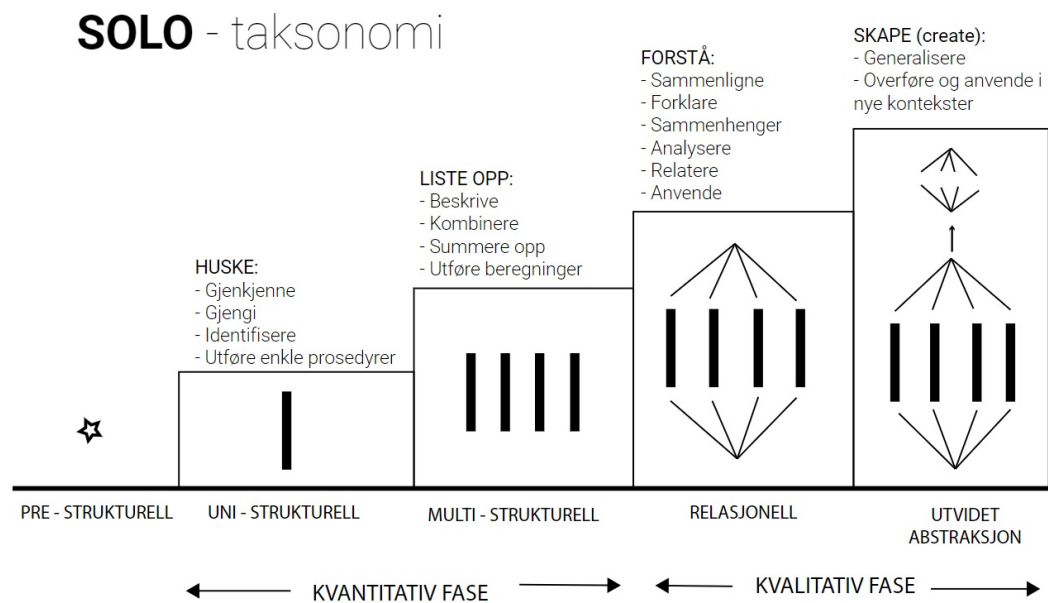
Dette er ikke nødvendigvis det samme som «prøve-og-feile»-metoden, som ofte brukes om å prøve ut et vilkårlig tilfelle for å se hva som fungerer (Posamentier & Krulik, 2015, s. 145). Derimot handler denne strategien om å spisse inn generalitetene når et problem er for komplisert (Posamentier & Krulik, 2015, s. 145). Guerrero (2010) omtaler gjetting og testing som en metode som kan brukes for å analysere kvantitative forhold i problemløsning. Denne metoden kan bidra til at elevene utvikler sin kvantitative resonneringsevne og evne til å løse komplekse problemer. Guerrero (2010) skriver videre at strategien bidrar til at elever enklere oversetter det dagligdagse språket i et problem, til et mer matematisk språk. Vi legger vekt på at *intelligent* gjetting og testing (IGT) er en strategi som kun kan brukes der elevene evner å tenke kritisk og vurdere hvilke verdier som er relevante å prøve ut i problemet (Posamentier & Krulik, s. 145). Når vi tester ut en gjetning finner vi ny informasjon som kan hjelpe oss videre i prosessen, og føre oss nærmere en løsning. Ubegrunnet eller tilfeldig gjetting kan ikke inngå i denne strategien - da vil det heller være hensiktsmessig å henvise til en annen strategi.

2.4 SOLO taksonomi og forståelse

Å *forstå* problemet er det første steget i Pólyas (2014) beskrivelse av problemløsningsprosessen. Lester og Lambdin (2004, s. 192) argumenterer for at løsning av problemer og utvikling av forståelse i matematikk lever i symbiose. Altså er det umulig å løse matematiske problemer dersom man ikke har en viss forståelse for matematikken i problemet. Klarer man å løse det vil man også oppnå dypere forståelse i matematiske konsepter knyttet til problemet (Lester & Lambdin, 2004, s. 191). Skemp (1978) beskrivelse av matematisk forståelse skiller mellom *relasjonell* og *instrumentell forståelse*. Relasjonell forståelse handler om å vite når, hvordan og hvorfor ulike prosedyrer fungerer til å løse problemer.

Instrumentell forståelse omfatter å kunne bruke noen prosedyrer uten at man forstår hvorfor eller hvordan de fungerer, og vitner derfor ikke om gode ferdigheter i problemløsning alene. Det er altså vesentlig at elevene ikke bare har kunnskap om strategiene, men at de også forstår hvorfor de fungerer og når de er egnet til å løse et problem. Å avgjøre om elevene har relasjonell forståelse for problemløsningsstrategier, krever derfor at vi definerer grensene for ulike grader av forståelse for strategiene. Her tar vi utgangspunkt i SOLO taksonomi for å beskrive ulike forståelsesnivåer for strategiene (Biggs & Collis, 1982). Når vi sammenkobler verb i strategiene og elevenes besvarelser med taksonomien, kan vi forsøke å måle om elevene forstår når, hvordan og hvorfor det er hensiktsmessig å bruke strategiene. De fem nivåene med tilhørende beskrivelser knyttet til problemløsning, presenteres her med tilhørende figur 2.4.1 (Biggs & Collis, 1982):

1. **Prestrukturelt nivå:** Å befinne seg på dette nivået vitner om svært liten eller ingen grad av forståelse. Eleven forstår ikke hvordan man kan løse problemer. I beste fall er elevens forståelse bestående av spredt informasjon som ikke er sammenkoblet.
2. **Unistrukturelt nivå:** Her kan eleven identifisere hva problemet innebærer og kan gjennomføre enkle prosedyrer, men benytter seg ikke av flere strategier samtidig. Eleven kan ha kunnskap om flere strategityper, men de brukes adskilt og uten å vurdere strategienes hensiktsmessighet.
3. **Multistrukturelt nivå:** I dette nivået vil eleven lett kunne identifisere problemet, og kombinere informasjonen. Eleven mestrer å bruke flere strategier, men ser ikke nødvendigvis sammenhenger mellom strategiene og problemene. Utrekninger gjøres likevel på en korrekt og hensiktsmessig måte.
4. **Relasjonelt nivå:** På dette nivået vil elevene kunne sammenligne problemene de støter på med problemer de har møtt tidligere. De vil kunne se sammenhenger, og anvende flere strategier samtidig på en hensiktsmessig måte. Eleven ser klare relasjoner mellom strategiene og problemene. Elever på dette nivået vil også kunne analysere arbeidet de har gjort, og se hvilke endringer som kunne ført til en mer hensiktsmessig problemløsningsprosess.
5. **Utvidet abstrakt nivå:** Eleven fortolker problemet fra ulike perspektiver samtidig, og kan generalisere problemene i utvidede former. Her mestrer eleven å overføre og anvende egne idéer og hypoteser i nye kontekster. Eleven kan kritisere og ekspandere problemet for å utforske og teoretisere videre.



Figur 2.4.1: SOLO taksonomi, modell av John Biggs fra 2012 oversatt av Universitetet i Oslo

(hentet fra

<https://www.uio.no/tjenester/it/utdanning/pedagogiske-tips/undervisningsplanlegging/lag-go-de-leringsmal/index.html>)

3.0 Metode

I dette kapittelet presenteres begrunnelse for valg av forskningsmetode, gjennomføring, forskningsutvalg og analysestrategier. Problemstillingen vi forsøker å gi svar på er:

Hvilke løsningsstrategier bruker tiendeklassinger i problemløsning, og hvordan bidrar strategiene til å komme frem til løsninger?

Å finne ut hvilke løsningsstrategier elever bruker når de løser problemer, krever at vi undersøker problemløsningsprosessen de gjennomgår. Som nevnt tidligere kan prosessen modelleres på ulike måter, eksempelvis som Pólyas (2014) heuristiske modell; (1) forstå problemet, (2) lage en plan, (3) gjennomføre planen og (4) se tilbake. Fokuset i forskningen vil på ulike tidspunkt ligge innenfor samtlige deler av problemløsningsprosessen. Vi har valgt å analysere elevenes skriftlige besvarelser i arbeid med problemløsningsoppgave, for både å kunne si noe om hvilke strategier de bruker og hvordan strategiene fører dem frem til løsninger. Dette minner om slik Postholm og Jacobsen (2018, s. 64) beskriver *enkelcasestudie*. Vi går inn i én enkelt klasse med hensikt å forstå hvordan elevene handler. For at vi som forskere skal kunne forstå hva som skjer i klasserommet, har vi valgt å innta et deduktivt perspektiv. I grove trekk betyr det at vi definerer på forhånd hva vi leter etter (Postholm & Jacobsen, 2011, s. 40). Senere i kapittelet vil vi derfor redegjøre for hvordan vi har brukt *teoridrevet innholdsanalyse* i kombinasjon med problemløsningsstrategiene til Posamentier & Krulik (2015) og SOLO taksonomi som analytisk rammeverk (Fauskanger & Mosvold, 2015; Biggs & Collis, 1982). Elevenes skriftlige besvarelser er derfor en stor del av den empiriske dataen i denne studien. Postholm & Jacobsen (2018, s. 64) presiserer at det er vesentlig at forskeren gjør rede for forholdene som karakteriserer forskningssituasjonen. Derfor har vi valgt å triangulere ved å gjennomføre et intervju med elevenes matematikklærer. Intervjuet skal bidra til å avklare potensielle spørsmål om elevenes problemløsningsprosess som vi ikke finner svar på i elevbesvarelsene.

Videre følger en kort redegjørelse av vår datainnsamlingsmetode, før vi presenterer forskningsdesignet. Deretter beskriver vi utvalget i forskningen, samt hvordan analyseprosessen har foregått. Til slutt vil vi diskutere ulike komplikasjoner ved vår rolle som deltakende forsker i klasserommet, forskningens kvalitet og etiske betraktninger.

3.1 Datainnsamling

Som nevnt over, samler vi inn data via elevers skriftlige besvarelser i arbeid med problemløsningsoppgaver. Vi ønsker å forstå hvilke strategier elever bruker når de løser problemer, og i tillegg forstå hvordan strategiene bidrar i løsningsprosessen. Gjennom analyse av besvarelsene forsøker vi å danne et bilde av elevenes problemløsningsprosess. Innsamlingsmetoden minner om slik Postholm og Jacobsen (2018, s. 64) beskriver enkelcasestudier. Målet med en enkelcasestudie er å presentere en grundig forståelse av en enkelcase. Gjennom metoden kan vi danne detaljerte beskrivelser av, og skape forståelse for elevenes bruk av problemløsningsstrategier (Yin, 2018, s. 15; Postholm & Jacobsen, 2018, s. 86).

En case kan defineres på mange ulike måter (Yin, 2018, s. 28-29). Stort sett handler casestudier om mennesker, enten individer eller grupper. I vår forskning er casen vi undersøker elevgruppen som skal løse problemene. I følge Postholm & Jacobsen (2018, s. 64) er det vesentlig at forskeren gjør rede for forholdene som karakteriserer akkurat denne casen. Senere i kapittelet vil vi derfor redegjøre for utvalget i forskningen vår (jf. 3.3). Samtidig har vi valgt å intervju matematikklæreren til elevene, for å skape et enda tydeligere bilde på hva som karakteriserer akkurat denne casen.

3.1.1 Enkelcasestudie

Med enkelcasestudie mener vi en casestudie hvor empirien hentes ut fra én enkel case. Dette må ikke forveksles med eksempelvis komparative casestudier hvor man sammenligner flere case, eller eksperimentelle casestudier hvor man undersøker hvilken effekt noe har på casen (jf. Postholm & Jacobsen, 2018, s. 86; Yin, 2018, s. 9). Vår enkelcasestudie gjennomføres ved at elevene arbeider skriftlig og individuelt med et utvalg problemløsningsoppgaver. Casen som studeres er altså elevgruppen når de løser problemer i en klasseromskontekst. Det er mulighet for elevene å stille oppklarende spørsmål til læreren eller oss som forskere, dersom ordlyd i problemløsningsoppgavene virker forvirrende. Selv om vi ønsker en naturlig klasseromskontekst, har vi valgt å begrense elevenes adgang på veiledning eller hjelp fra læreren. Dette er for å forhindre potensielle feilkilder der lærer influerer elevenes prestasjoner. Fordi empirien er *elevenes* besvarelser, kan vi ikke la læreren aktivt påvirke elevenes problemløsningsprosess.

Vi forsøker å oppnå dyp forståelse for hvordan elevgruppen løser problemer. Gjennom analyse av elevbesvarelsene ønsker vi å kunne beskrive hvordan problemløsningsstrategiene hjelper elevene å komme frem til løsninger. En av de sterkeste sidene ved enkelcasestudier er at de kan brukes til å gi tykke og detaljerte beskrivelser av et fenomen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 86; Yin, 2018, s. 15). Slike studier har stor intern gyldighet, og kunnskapen kan oppleves som svært relevant for individene i casen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Samtidig underbygger dette også en av forskningsdesignets svakheter, der ekstern gyldighet er vanskelig å oppnå, nettopp fordi den fremskaffede kunnskapen kan være vanskelig å overføre til en annen kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 65; Yin, 2018, s. 44-45). Dette diskuteres ytterligere i kapittel 3.5.

En grunn til at vi har valgt å bruke casestudie, er at det er en velegnet metode for problemstillinger som forsøker å forklare «hvordan» eller «hvorfor» (Yin, 2018, s. 10). Vi ønsker å finne svar på hvordan elevenes bruk av løsningsstrategier fører dem frem til tilfredsstillende løsninger. Postholm og Jacobsen (2018, s. 64) presiserer at forskeren i en casestudie kan gå inn i en bestemt klasse for å se hvordan akkurat disse elevene handler. Empirien i vår casestudie er elevenes besvarelser, som vi bruker for å undersøke hvorfor elevene velger som de gjør. Ofte brukes empirien for å undersøke et samtidfenomen i sin kontekst (Yin, 2018, s. 15). Et mål med studien er å forklare dagens ungdomskoleelevers forståelse for og kunnskap om problemløsningsstrategier.

3.1.2 Intervju

Fordi vi ønsker å beskrive casen (elevgruppen) ytterligere, har vi valgt å gjennomføre et semi-strukturert intervju med matematikklæreren til elevene. Intervjuet ble gjennomført i forkant av casestudien. Postholm og Jacobsen (2018, s. 121) skriver at i denne type intervju vil kunnskap dannes mellom informanten og forskeren. Bakgrunnen for at vi valgte å ha et intervju i tillegg til casestudien, var at vi ville få et innblikk i hvor stor erfaring elevene hadde med problemløsning fra undervisningen. Gjennom hvordan læreren har lagt til rette for problemløsning i undervisningen, og hvilken kunnskap elevgruppen besitter om løsningsstrategier i problemløsning. Fokuset ligger på synspunktet til informanten, og dette kjennetegnes ved gangen i intervjuet. Vi hadde forberedt et sett med spørsmål som vi samtidig ikke var avhengige av. Da informanten kom med synspunkter som vi syntes var interessante, stilte vi oppfølgingsspørsmål rundt dette. Det samme gjelder da informanten

introduserte en annen tematikk, fulgte vi heller opp dette enn å gå videre med våre egne forberedte spørsmål, i tråd med slik Postholm & Jacobsen (2018) beskriver gjennomføringen av et semi-strukturert intervju.

3.1.3 Deltakende observasjon

I denne studien har vi også valgt å kommentere vår deltakende observasjon som foregikk da elevene løste problemene. Selv om elevene arbeidet individuelt med problemløsningsoppgavene, var vi aktive observatører i prosessen med mulighet for påvirkning på elevene. Denne type observasjon blir beskrevet av Bjørndal (2017) som observasjon av andre orden. Det som kjennetegner denne ordenen er at selve observasjonen ikke er det primære fokuset, men heller sidestilt med undervisningen eller veiledningen som foregår. Det er nettopp veiledningen i denne prosessen vi ville fokusere på. Vi fokuserte ikke på å notere hva vi observerte, slik som annen observasjon ofte tar for seg. Hovedfokuset vårt var å overvære casestudien for å svare på eventuelle spørsmål elevene hadde om problemene, uten å aktivt hjelpe dem i prosessen. Pólya (2014) skriver om at det å hjelpe elevene i en problemløsningsprosess er en av de viktigste oppgavene til en veileder. Om vi inntar rollen som veiledere fører det til at prosessen ble mer lik slik problemløsning bør foregå. Pólya (2014) understreker viktigheten av at elevene arbeider mest mulig på egenhånd. Dette preget også hvordan vi oppførte oss i klasserommet, ved at vi veiledet bare da vi følte at elevene ikke forstod ordlyden i problemene på egenhånd.

3.2 Forskningsdesign

I dette kapittelet vil vi presentere hvordan vi har designet casestudien vår, samt hvordan og hvorfor tre problemløsningsoppgaver er valgt ut. Gjennom analyse av elevarbeidene får vi et innblikk i hvilke strategier elevene anvender og hvilke som bidrar til løsninger. På bakgrunn av dette var det relevant for forskningen vår at problemene var ulike i ordlyd, omfang og innhold. Ved at elevene løser problemer som omfatter flere temaer i matematikken, får de muligheten til å vise et så bredt spekter som mulig av de strategiene de mestrer å bruke. Problemstillingen vår tar for seg elevers forståelse for hensiktsmessig bruk av løsningsstrategier innenfor problemløsning generelt, og derfor er det vesentlig å utfordre elevene på ulike plan. Et problem for en person er ikke nødvendigvis et problem for en annen (Mason & Davis, 1991, s. 3; Bjuland, 2004, s. 219). Om et problem faktisk *er* et problem

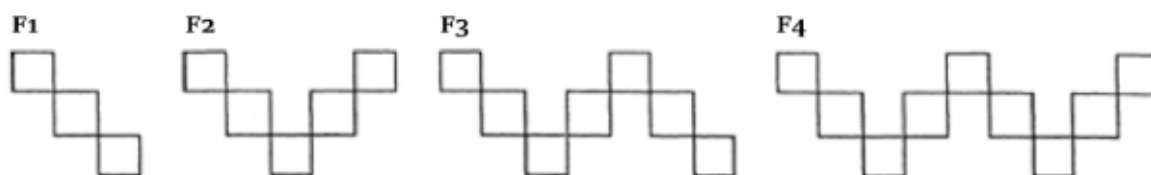
avhenger altså av problemløseren. Hvis elever løser mange problemer som ligner på hverandre, vil de etterhvert slutte å oppleves som problemer.

De ti løsningsstrategiene til Posamentier og Krulik (2015) var med på å påvirke utvelgelsen av problemer. Et stort poeng med forskningen vår er å se hvilke strategier elevene mestrer å bruke når de skal løse problemer. Om vi velger å la elevene løse tre problemer der det er mest intuitivt og hensiktsmessig å velge én og samme strategi, dukker spørsmål om overførbarhet opp. Vil en elev som kun bruker arbeide baklengs (AB) i alle tre problemer, klare å løse problemer hvor AB ikke er hensiktsmessig å bruke?

Som et supplement til problemløsingen, fikk elevene svare på noen refleksjonsspørsmål tilknyttet til hvert problem. Vårt mål med disse refleksjonsspørsmålene var at elevene selv kunne forklare hvordan de hadde forsøkt å løse problemene. Her fikk elevene dessuten anledning til å reflektere over hva de gjorde når de stod fast i problemløsingen. Elevenes gjengivelse av deres egen problemløsningsprosess brukes som et verktøy i analysen. Refleksjonene tydeliggjør hvordan elevene har forsøkt å løse problemet. Vi bruker refleksjonene som supplement til å avgjøre hvilke løsningsstrategier elevene hadde benyttet seg av. Eksempelvis i besvarelser der det ikke kommer tydelig frem hvordan elevene har forsøkt å løse problemet, kan elevens gjengivelse hjelpe oss å forstå hvilke strategier de har prøvd å bruke.

3.2.1 Problemløsningsoppgavene

Elevene fikk utdelt et hefte bestående av tre problemløsningsoppgaver, samt tilhørende sider der hvor de reflekterte over prosessen med å løse problemet. Vi har valgt tre ulike problemløsningsoppgaver, der målet var at elevene skulle variere strategibruken sin mellom hver av disse. Problemene ble fremvist for læreren til elevgruppen på forhånd. Bakgrunnen for at vi valgte det, er for at vi ville forsikre oss om at problemene var innenfor rekkevidde for hva elevene kunne mestre, og i at de i tillegg skulle oppleves som problemer.



Å telle kvadrater

Hvor mange kvadrater trenger du for å lage figur 14 i rekken?

Hvor mange hjørner vil figur 14 ha? (Her finnes det flere måter å bestemme hva et hjørne er. Du kan velge, men forsøk å beskrive kort hva du mener er et hjørne i denne oppgaven)

Figur 3.2.1.1: Problemet «Å telle kvadrater». Hentet fra Mason og Davis (1991, s. 64).

«Å telle kvadrater» er et problem der elevene skal arbeide med ulike figurer som endrer seg i et fast mønster. Problemet er todelt, der man først blir spurt om å finne ut hvor mange kvadrater figur 14 vil ha. Neste spørsmål er en utvidelse av problemet, og her skal elevene finne ut hvor mange hjørner figur 14 vil ha. Det er mulig å definere hjørner på ulike måter, og det gis anledning til elevene avgjøre hva et hjørne er på egenhånd. Vi forventer at de fleste elevene vil forsøke seg på første del av problemet, men at enkelte kan slite med den siste delen. I problemløsningsprosessen kan elevene se ulike ting i figurrekken (Mason & Davis, 1991, s. 64). Noen ser kvadratene i grupper av tre, og danner et mønster ut av det, andre kan se at neste figur i rekken alltid øker med to kvadrater. Altså er det naturlig at elevene vil bruke MG, kanskje også uten å tenke over det. Det kan dessuten være naturlig for enkelte elever å tegne de neste figurene, for enklere å kunne se det som skal vurderes (Posamentier & Krulik, 2015, s. 115). Problemløsningsstrategiene vi forventer å se at elevene bruker er blant annet logisk resonnement (LR), mønstergjenkjenning (MG), lage en visuell representasjon (LVR) og organisere data (OD). LR vil som beskrevet gjennomsyre de andre strategiene (Posamentier & Krulik, 2015, s. 1).



Bestefars tiere!

Bestefar har spart slik at han har 65 tiere. Han vil gi pengene til barnebarna sine:

- De små skal få 3 tiere hver
- De store skal få 7 tiere hver

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen.

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha?

Figur 3.2.1.2: Problemet «Bestefars tiere». Hentet fra Torkildsen (2017, s. 8).

«Bestefars tiere» er et problem som ble valgt fordi vi tenkte at denne kunne løses med flere ulike løsningsstrategier. Samtidig er det et problem der hvor elevene kan komme med flere ulike svar, som kan være korrekte. Altså ser vi et grunnlag at en større andel av elevene vil komme fram til en løsning. Problemet baserer seg ikke på noe spesielt matematisk tema, foruten om at det er noen regneoperasjoner som må gjøres. Vi forventer å se igjen strategier som: Logisk resonnement (LR), intelligent gjetting og testing (IGT) og organisere data (OD). I følge Torkildsen (2017, s. 8) er en typisk strategi som brukes for å løse dette IGT. Om eleven ikke umiddelbart vet hvordan problemet skal løses, kan det være hensiktsmessig å bare prøve ut noe som kan fungere. Samtidig forklarer han at det å lage en systematisk tabell (OD) også brukes av mange elever når de møter dette problemet. .



Mortens klinkekuler

Morten og vennene spilte med klinkekuler i friminuttene:

- I første friminutt vant Morten så mye at han doblet antall klinkekuler.
- I andre friminutt gikk det ikke så bra. Da tapte han 7 klinkekuler.
- I tredje friminutt var han heldig og vant 3 klinkekuler.
- I fjerde friminutt var han skikkelig uheldig og tapte halvdelen av kulene.
- Da hadde han 13 klinkekuler igjen i boksen.

Hvor mange klinkekuler hadde Morten før de begynte å spille?

Figur 3.2.1.3: Problemet «Mortens klinkekuler». Hentet fra Torkildsen (2017, s. 10).

Dette problemet ble valgt som et supplement til de to andre problemløsningsoppgavene. Noe av bakgrunnen av at vi valgte nettopp denne, er at vi tenkte over hvilke løsningsstrategier som ikke ville bli benyttet i det hele tatt i de to første problemene. Valget falt da ned på dette problemet, hvor elevene får presentert en rekke hendelser der hvor antallet klinkekuler endrer seg. For å løse problemet må elevene finne veien tilbake til det antallet klinkekuler Morten hadde før han begynte å spille. Når konklusjonen er gitt og man skal finne veien tilbake til startpunktet, er det ofte hensiktsmessig å arbeide baklengs (AB) (jf. Posamentier & Krulik, 2015, s. 29; Croy, 2000, s. 175). Problemet legger altså til rette for bruken av AB, som påvirket avgjørelsen vår. Torkildsen (2017, s. 10) skriver dessuten at den mest typiske strategien elevene skulle benytte seg av i dette problemet er arbeide baklengs (AB). Samtidig så vi muligheten for at elevene kunne benytte seg av flere ulike strategier i tillegg til AB.

Intelligent gjetting og testing (IGT) og organisere data (OD) ser vi på som to mulige løsningsstrategier elevene kan benytte seg av. Som nevnt tidligere kan det å gjette og teste ut noen tilfeller være gunstig om man ikke har noen klar plan for å løse problemet (Torkildsen, 2017, s. 8).

3.3 Utvalg

I vår case ønsker vi ikke å undersøke en eksepsjonell klasse. Ofte velges en case ut på bakgrunn av at den er helt spesiell eller unik (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Men i vår forskning er det ikke relevant å finne ut hvorfor en klasse presterer svært godt eller svært dårlig i problemløsning. Datainnsamlingen ble gjort i tiende klasse på en ungdomsskole på Østlandet. Denne tiendeklassen er valgt ut fordi de går på en av praksisskolene Høgskolen i Østfold er tilknyttet. Vi ønsker å undersøke hvordan fordeling av strategibruk og strategienes rolle i en visst antall elevers problemløsning ser ut. Målet med studien er ikke å se på de ekstreme tilfellene, men heller å forsøke og forklare hvordan ungdomsskoleelever bruker problemløsningsstrategier for å komme frem til løsninger. Ved hjelp av matematikklærerens perspektiv på elevgruppen forsøker vi uansett å beskrive hvilke karakteristikk som kjennetegner nettopp denne klassen.

Elevene i klassen har fått et valg om å delta i forskningen. Ettersom vi ikke hadde satt noen kriterier for utvelgelsen, var det de elevene som var villige til å bidra i forskningen, som forskningen bygger på. Det er åtte elever som har deltatt i forskningen. Elevbesvarelsene er anonymiserte, slik at vi som forskere ikke vet hvilke av elevene som har levert hvilke besvarelser. Vi har gitt elevene fiktive navn, for å gjøre håndteringen og analysen av empirien mer oversiktlig. Av de åtte navnene som er gitt, er det fire guttenavn og fire jentenavn. Likevel vet ikke vi om en besvarelse med jentenavn faktisk er gjort av en jente.

3.4 Analyse av elevarbeider

Som nevnt er den største delen av empirien i vår forskning elevbesvarelser på problemløsningsoppgaver. Et vesentlig spørsmål i forskningen vår handler om hvilke strategier elevene bruker når de løser problemer. Her har vi på forhånd definert hvilke problemløsningsstrategier vi tar utgangspunkt i at eksisterer. Strategiene danner videre et grunnlag for å kategorisere dataene i elevbesvarelsene ut i fra hvilke strategier som anvendes

til de ulike problemene. På denne måten analyseres empirien deduktivt. Fauskanger og Mosvold (2015, s. 81) definerer denne måten å analysere på som teoridrevet innholdsanalyse. Vi leter etter spesifikke strategier fra allerede eksisterende teori i elevarbeidene, og undersøker hvordan de brukes for å komme frem til løsninger. På denne måten kan vi validere om et knippe ungdomsskoleelever har kunnskap om problemløsningsstrategier og om de mestrer å bruke de for å komme frem til løsninger. Det konkrete analysearbeidet ble gjennomført ved at vi vurderte hver enkelt elevbesvarelse opp mot følgende spørsmål:

- Hvilke strategier brukes for å løse problemet?
- Mestrer eleven bruken av strategiene? Kan vi plassere strategibruken innenfor et forståelsesnivå i taksonomien?
- Fører strategien til en eller flere tilfredsstillende løsninger?
- Hvordan reflekterer eleven over hvordan han/hun har forsøkt å løse problemet? Hva gjorde eleven når han stod fast?

Spørsmålene er utarbeidet med utgangspunkt i strategitypene som definert av Posamentier og Krulik (2015), elevenes refleksjoner knyttet til problemløsingen og SOLO taksonomi. Strategitypene til Posamentier og Krulik (2015) er:

1. Logisk resonnement
2. Mønstergjenkjenning
3. Arbeide baklengs
4. Innta et annet perspektiv
5. Vurdere ekstreme tilfeller
6. Løse et enklere problem
7. Organisere data
8. Lage en visuell representasjon
9. Redegjøre for alle muligheter
10. Intelligent gjetting og testing

Enkelte strategier leder ingen vei, mens andre er til hjelp og fører elevene videre i problemløsningsprosessen. Graden av forståelse for hvordan strategiene kan brukes, vil påvirke hvorvidt elevene kommer frem til tilfredsstillende løsninger. Vi har derfor vurdert elevenes strategibruk opp mot nivåene i SOLO taksonomi, for å kunne si noe om hvor godt

elevene forstår strategiene og problemløsning. Nivåene i SOLO taksonomi er (Biggs & Collis, 1982):

- Prestrukturelt nivå
- Unistrukturelt nivå
- Multistrukturelt nivå
- Relasjonelt nivå
- Utvidet abstrakt nivå

Ved å sammenkoble verb i strategiene og elevenes besvarelser med taksonomien, kan vi måle elevenes grad av forståelse for strategiene. Altså analyserer vi elevenes besvarelser samtidig som vi gjennomfører en vurdering av hvilken grad av forståelse de har. Her er målet å få svar på hvordan elevenes bruk av strategier fører dem frem til løsninger i problemløsningsprosessen.

Vi har analysert elevbesvarelsene hver for oss, slik at vi ikke har påvirket hverandre i analyseprosessen. Ved å gjøre det på denne måten, unngår vi å legge føringer for hverandre når vi tolker løsningsforslagene og hvilke funn vi oppdager. Etterpå sammenlignet og drøftet vi analysene opp mot hverandre. Analyseprosessen er ifølge Stake (1995) preget av kreativitet og intuitive prosesser for å skape mening og forståelse. Når vi analyserer hver for oss og sammenligner etterpå, kan vi derfor oppnå å skape enda dypere forståelse for empirien.

3.4.1. Kategorier

Strategiene er verktøy elevene bruker i problemløsningsprosessen. Vi leter etter disse spesifikke strategiene i elevenes besvarelser, og hvordan de brukes for å komme frem til løsninger. Underveis i analyseprosessen oppdaget vi en svakhet ved strategitypene til Posamentier og Krulik (2015). Det hender at elevene ikke forstår hvordan de skal løse et problem, men likevel forsøker å løse det. Da bruker noen elever en ellefte strategitype som vi har valgt å navngi *tilfeldig gjetting og testing (TGT)*. Med TGT mener vi at elevene gjør et forsøk på å gjette tilfeldig hva løsningen kan være, uten å gjøre intelligente vurderinger (som er et vesentlig kriterium for IGT (jf. 2.3.10)). Da mangler en tydelig vurdering av verdiene som er relevante å teste ut. At elever bruker TGT kan skyldes flere årsaker som vi håper å gi

tydeligere svar på i diskusjonskapittelet (jf. 5.2.11). Under følger en tabell med oversikt over kategoriene og tilhørende kriterier (jf. figur 3.4.1.1). Løsningsforslagene må tilstrekkelig oppfylle kriteriene for å kategoriseres deretter. Med tilstrekkelig mener vi at besvarelsene tydelig kan oppfattes som forsøk som samsvarer med kriteriene. Et løsningsforslag trenger derfor ikke å oppfylle samtlige kriterier for å kategoriseres som en strategitype. Som forskere vurderer vi til enhver tid i analysen hvorvidt et løsningsforslag tilfredsstiller noen eller alle kriteriene for kategoriene.

Kategori	Kriterier for kategori (eleven viser at den kan ...)
Logisk resonnement (LR)	• Generere logiske utsagn • Trekke ut informasjon, tolke den og konkludere på bakgrunn av den
Mønstergjenkjenning (MG)	• Kjenne igjen et mønster og bruke det aktivt i problemløsingen
Arbeide baklengs (AB)	• Reversere operasjoner for å komme tilbake til utgangspunktet
Innta et annet perspektiv (IAP)	• Finne nye synsvinkler i problemet • Dele opp og rekombinere elementer på en mer tilgjengelig måte
Vurdere ekstreme tilfeller (VET)	• Vurdere og bruke ekstreme tilfeller aktivt i problemløsingen
Løse et enklere problem (LEP)	• Dele opp problemet • Løse simple deler før man gradvis løser vanskeligere deler
Organisere data (OD)	• Hente ut, systematisere og kategorisere informasjon • Organisere med god orden

Kategori	Kriterier for kategori (eleven viser at den kan ...)
Lage en visuell representasjon (LVR)	• Representere informasjon på en visuell måte • Bruke tegninger til å assimilere relevant informasjon
Redegjøre for alle muligheter (RAM)	• Konstruere oversiktlige lister for alle muligheter
Intelligent gjetting og testing (IGT)	• Vurdere og avgrense for potensielle løsninger • Gjette og teste på bakgrunn av intelligente vurderinger
Tilfeldig gjetting og testing (TGT)	• Gjette og teste uten intelligente vurderinger

Figur 3.4.1.1: Tabell med oversikt over kategoriene i analysen.

3.5 Validitet og reliabilitet

Kunnskapen som har blitt konstruert mellom oss forskere og elevene vil være kontekstuell (Postholm & Jacobsen, 2018). Fordi vi undersøker en spesifikk klasse, vil derfor ikke kunnskapen være helt subjektiv. Målet vårt i dette kapittelet, er å bevisstgjøre hvilke funn som er overførbare til annen forskning. I tillegg vil vi drøfte noen tiltak vi kunne gjort for at validiteten til forskningen vår kunne blitt enda sterkere. Vi vil også drøfte noen tiltak vi har gjennomført for å unngå eventuelle feilkilder.

Ofte stilles det spørsmål ved hvorvidt enkelcasestudier kan brukes til å generalisere (Yin, 2018, s. 20). Her er det viktig å være klar over hvilke mål vi har med studien. Et mål med studien er å forstå hvordan elever i en klasseromskontekst bruker ulike løsningsstrategier for å løse et problem. Å undersøke et fenomen i sin kontekst danner et grunnlag for å kunne generalisere teorier (Yin, 2018, s. 21). Casestudier gir ikke svar på hvordan fenomenet ser ut i andre kontekster, men det er heller ikke målet med studien (Yin, 2018, s. 15). Vi trekker oss

vekk fra å fastslå sannsynligheten for at elever kommer til å bruke de samme strategiene hver gang de møter liknende problemer. Dette er i tråd med slik Yin (2018, s. 21) beskriver målene med casestudier. Vi får dermed ikke svar på hvordan elever vil løse problemer i hverdagslivet, hverken nå eller i fremtiden. Likevel antas det at god kompetanse i problemløsning i matematikk kan bidra til å gi elever gode ferdigheter i å håndtere problemer utenfor matematikken (Lester & Lambdin, 2004, s. 192).

Om kunnskapen man får frem fra én bestemt klasse er overførbart til en annen, må forskeren redegjøre for de forholdene man mener kjennetegner akkurat denne casen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64-65). Først da kan andre vurdere om kunnskapen er overførbart eller ikke (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 65). Altså er det vesentlig for oss å kunne beskrive hva som karakteriserer klassen så godt som mulig for å kunne si noe om hvorvidt funnene er verdifulle for andre. Derfor spiller intervjuet med matematikklæreren til klassen en viktig rolle for forskningen. Lærerens perspektiv på og beskrivelser av klassen som helhet vil kunne bidra til å si noe om hva som karakteriserer klassen. Postholm og Jacobsen (2018, s. 65) påpeker at det er særdeles viktig at forskeren tenker over hvorfor man har valgt akkurat denne casen.

Vi valgte de ti strategitypene til Posamentier og Krulik (2015) fordi de rommer store deler av de strategiene vi antok ville komme til syne i elevbesvarelsene. Samtidig var vi klar over at vi kunne møte på ulike varianter av strategier, eller andre strategier som Posamentier og Krulik (2015) ikke beskriver. Analysearbeidet gjennomførte vi som nevnt hver for oss, hvor vi individuelt analyserte hvorvidt elevene benyttet seg av strategiene til Posamentier og Krulik (2015). De strategiene som ikke havnet inn under noen kategori, tok vi også med i analysen, slik at det skulle skape et helhetlig bilde av elevarbeidene. Et helhetlig bilde var også fokuset vårt når det kom til utvelgelse av hvilke forskningsmetoder vi skulle benytte oss av. En hybridløsning ble valgt, hvor vi gjennomførte både casestudie, intervju og deltakende observasjon. Creswell (2014) poengterer at å triangulere ulike empiri vil være med på å styrke gyldigheten til forskningen. Dette er et av tiltakene vi gjorde for at forskningen skulle bli gjennomført på en hensiktsmessig måte sett i sammenheng med målet for forskningen. At vi valgte deltakende observasjon som metode var på bakgrunn av hvor viktig Pólya (2014) mener at det er å hjelpe elevene i en problemløsningsprosess.

Reliabilitet omhandler i følge Yin (2018) hvorvidt forskningen som har blitt gjennomført, kan repeteres slik at samme resultat kan oppnås. Yin (2018) skriver videre at en casestudie

sjeldent blir repetert. I vår forskning handler derfor reliabilitet om å dokumentere hva vi har gjort, slik at andre kan vurdere de valgene vi har tatt. Alt vi har produsert eller reproducert i denne forskningen har vi forsøkt å dokumentere så godt som mulig. Om noen andre forskere gjennomfører en casestudie med kriteriene vi har beskrevet, er det ikke tvil om at de ville oppnådd andre resultater. Likevel vil det antakeligvis være likheter, fordi selve gjennomføringen vil være tilnærmet lik. Fordi vi er to forskere som gjennomfører forskningen, vil tolkningene og konklusjonene vi dokumenterer produseres gjennom samarbeid. Ved at vi har arbeidet deduktivt i denne studien, har vi benyttet oss av tidligere forskning og teori som vi har dokumentert bruken av. I tillegg er problemløsning temaet vi forsker på. Som nevnt tidligere er dette et tema som har fått mer fokus i LK20. Samtidig er det viktig å påpeke at det er mange faktorer som spiller inn på hvordan undervisningen i hvert enkelt klasserom foregår. Dette vil også påvirke hvor reproduserbart funnene i forskningen vår er.

3.6 Etiske betraktninger

Vår prosess startet med at vi kom fram til hva vi ville undersøke. Vi kontaktet ulike ungdomsskoler på Østlandet, hvor valget til slutt falt ned på en. Vi sendte deretter inn en søknad til Norsk senter for forskningsdata. NSD har fått i oppdrag fra Høgskolen i Østfold om å kvalitetssikre rammene rundt forskningen. Vi fikk godkjent søknaden, etter å ha gjort noen endringer i både samtykkeskjema til elevenes foreldre og til læreren. Litt i etterkant av godkjent søknad, besøkte vi klassen vi skulle gjennomføre forskningsopplegget i. Til elevene forklarte vi kort hva forskningen handlet om, og delte i tillegg ut samtykkeskjemaer. Vi avtalte at de som ville delta kunne levere tilbake med underskrift innen to uker, litt før vi hadde planlagt å gjennomføre opplegget.

Matematikklæreren vi skulle intervjuet fikk et innblikk i problemløsningsoppgavene elevene skulle arbeide med. Dette gjorde vi for å forsikre oss om at problemene hadde en vanskelighetsgrad som var innenfor kunnskapsnivået til elevgruppen. Intervjuet vi gjennomførte med læreren ble gjort etter vi leverte samtykkeskjemaene, og før vi gjennomførte casestudien. NSD var veldig tydelige på at læreren ikke kunne snakke om enkeltelever i dette intervjuet. Dette forsikret vi oss om at ikke skulle skje ved at vi ikke stilte spørsmål som omhandlet enkeltelever, og at vi også la vekt på ovenfor læreren at vi bare var interessert i elevgruppen som helhet.

Noe av det viktigste i forskningen vår er elevarbeidene vi samler inn. Vi la tydelig fram for elevene under det første besøket, før gjennomføringen, og i samtykkeskjemaet som foreldrene skulle skrive under på, at arbeidet de gjør er anonymt. Vi tildelte elevarbeidene nummer slik at ingen skal kunne kobles til arbeidene. I analysen vil vi benytte oss av fiktive navn som også sikrer anonymiteten til elevene. Disse fiktive navnene har vi også fordelt slik at fire av navnene er jentenavn og fire av navnene er guttenavn. Det er tilfeldig valgt hvilke elever som har fått tildelt henholdsvis guttenavn og jentenavn. Vi har også gjort tiltak for at selve problemløsingen skal skje så optimalt for elevene som mulig. Likevel tok vi høyde for at det er utallige ulike faktorer som kan spille inn i en slik prosess som kan være med på å påvirke resultatene. Vi understreket for elevene og i analysedelen at det er våre tolkninger av deres arbeid som ble gjeldende. Vi har forsøkt etter beste evne å være objektive, men uttrykker likevel at analysearbeidet som er gjort er våre tolkninger og konklusjoner. Våre oppfatninger kan skille seg fra hvordan andre forskere ville oppfattet det samme datamaterialet vi har arbeidet med.

4.0 Analyse

I analysekapittelet vil vi redegjøre for funnene i elevbesvarelsene. Her har vi laget koder og kategorier i samsvar med teori, og bruker disse for å skille fenomenene fra hverandre. Ved hjelp av Posamentier og Kruliks (2015) ti strategityper, er elleve kategorier for analysen utarbeidet (jf. figur 3.4.1.1). Vi beskriver hvor ofte og hvordan elevene bruker en gitt strategi for å komme frem til løsninger i problemløsningsoppgavene.

Problemløsningsstrategiene (kategoriene):

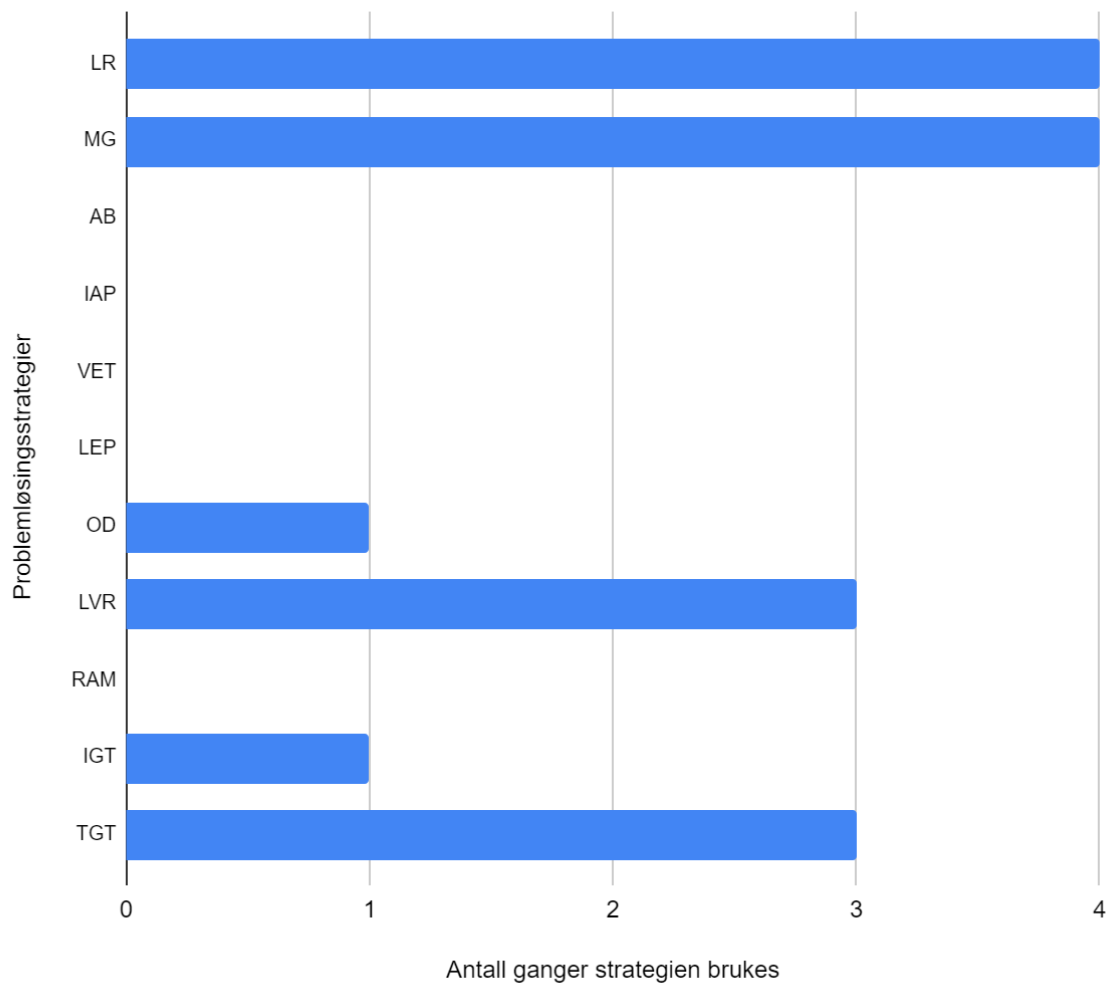
1. Logisk resonnement (LR)
2. Mønstergjenkjenning (MG)
3. Arbeide baklengs (AB)
4. Innta et annet perspektiv (IAP)
5. Vurdere ekstreme tilfeller (VET)
6. Løse et enklere problem (LEP)
7. Organisere data (OD)
8. Lage en visuell representasjon (LVP)
9. Redegjøre for alle muligheter (RAM)
10. Intelligent gjetting og testing (IGT)
11. Tilfeldig gjetting og testing (TGT)

Vi forsøker dessuten å vurdere elevenes besvarelser innenfor ulike forståelsesnivåer ved hjelp av SOLO taksonomi (Biggs & Collis, 1982). Funnene presenteres systematisk med diagrammer og utdrag fra elevarbeidene, og problemene gjennomgås hver for seg.

4.1 Å telle kvadrater

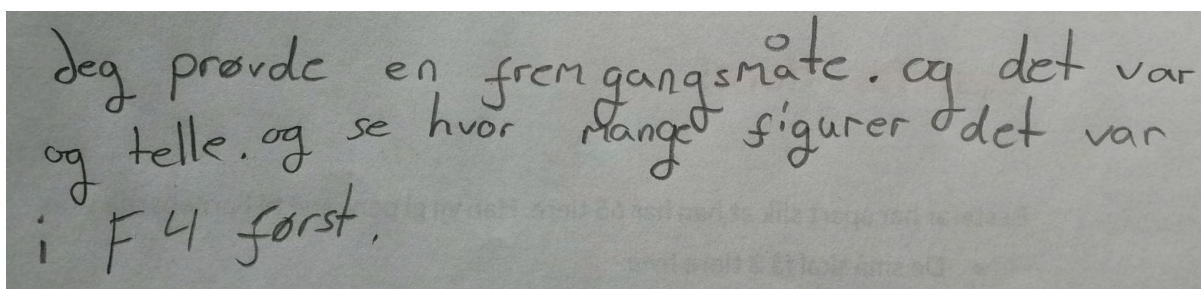
Problemet handler om å finne ut hvor mange kvadrater og hjørner figur nummer 14 i rekken har. Her bruker de fleste elevene LR og MG for å løse problemet, men også LVR og TGT er høyt representert. Strategiene OD og IGT blir brukt én gang hver, som betyr at det er fem strategier som ikke blir benyttet; AB, IAP, VET, LEP og RAM.

Å telle kvadrater



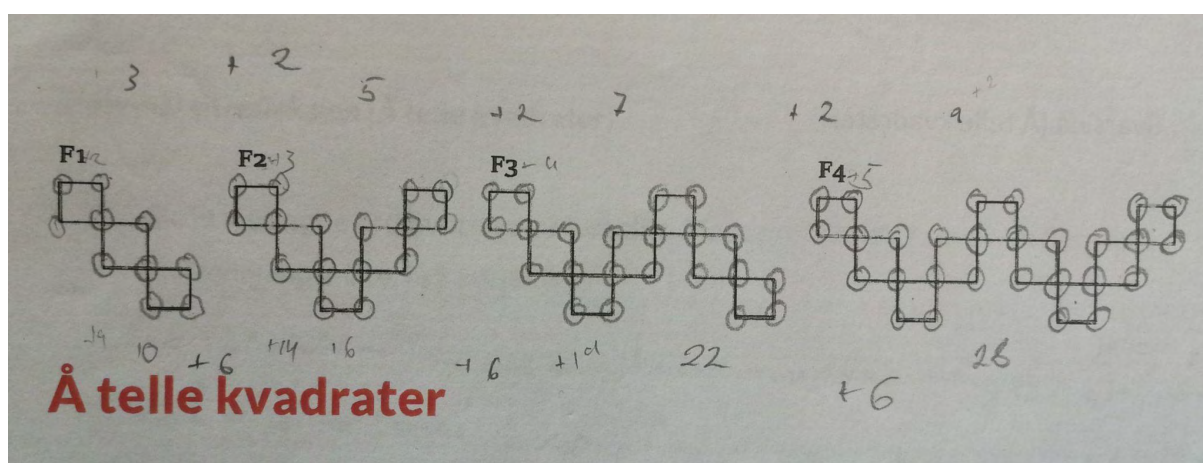
Figur 4.1.1: Stolpediagram som viser antall ganger problemløsningsstrategiene brukes for å løse problemet «Å telle kvadrater».

I dette problemet kommer fire av elevene frem til tilfredsstillende løsninger. Av de fire bruker samtlige MG som strategi. Turid, Tuva, Morten og Thomas løser problemet enten ved å bruke MG alene, eller ved å kombinere med andre strategityper. Her finner vi et tydelig skille mellom Thomas og de tre andre. Thomas, som vi vurderer til unistrukturelt nivå, bruker kun MG for å løse problemet.



Figur 4.1.2: Thomas forklarer hvordan han forsøkte å løse problemet ved å telle seg frem til hvor mange kvadrater det er i figur 4.

Besvarelsen bærer preg av at Thomas har forsøkt å telle kvadrater i hodet, og det vitner om at han har brukt kunnskap om mønster for å produsere en løsning. Det samme gjør Turid, Tuva og Morten, men de kombinerer også MG med LR og én annen strategi. Samtlige bruker LR for å konkludere om løsningen kan være korrekt. Her ser elevene tilbake på prosessen og vurderer om strategien de har valgt gir en potensielt tilfredsstillende løsning. Det er tydelig at kombinasjonen av MG og LR er en oppskrift for suksess. Likevel løser elevene problemet på ulike måter, som preges av den tredje og siste strategien de bruker.

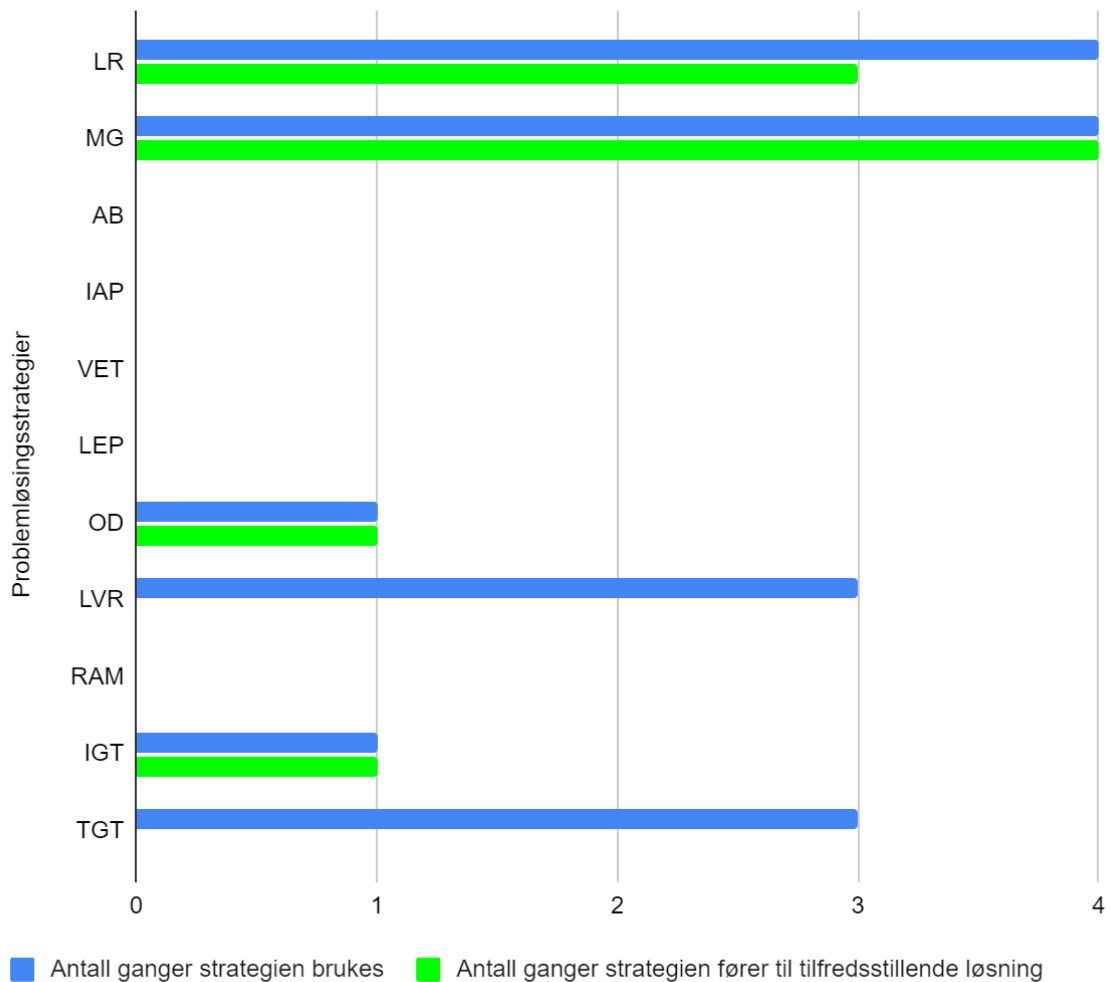


Figur 4.1.3: Turid sin organisering av dataene (OD) ved å notere antall kvadrater og hjørner under hver figur, hjelper henne å finne mønster i rekken (MG).

Turid organiserer dataene (OD) i problemet først, og i denne prosessen finner hun et mønster. Tuva gjennomfører en intelligent gjetting og testing (IGT) for å produsere en formel som beskriver mønsteret. Morten begynner å løse problemet ved å tegne (LVR), men vurderer siden at det vil ta for lang tid å tegne alle figurene. Likevel bidrar forsøket på å bruke strategien til å flytte fokuset hans over på MG. På den måten fører LVR han videre i

problemløsningsprosessen selv om strategien ikke bidrar med noe nevneverdig ny informasjon.

Å telle kvadrater



Figur 4.1.4: Stolpediagram som viser antall ganger en strategi brukes og antall ganger strategien fører til en tilfredsstillende løsning på problemet «Å telle kvadrater».

4.1.1 Forståelsesnivåer

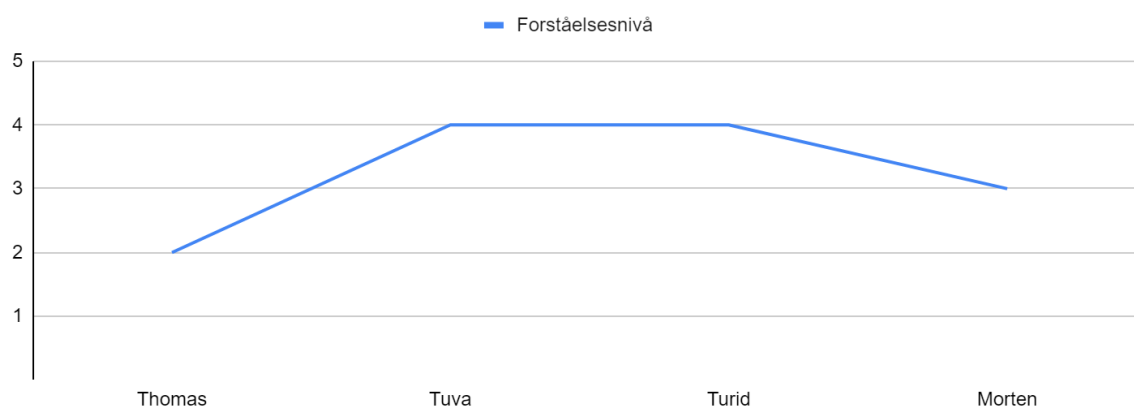
Det er stort sprik i forståelsesnivåene elevene har, og forskjellene kommer frem gjennom hvilke strategier de velger å bruke. Her presenterer vi elevenes grad av forståelse med utgangspunkt i tre av strategiene som brukes hyppigst for å løse problemet.

Forståelsesnivåene er satt med utgangspunkt i SOLO taksonomi. Her ønsker vi å presisere at det er våre vurderinger av elevenes besvarelser som danner grunnlaget for å avgjøre hvilket

forståelsesnivå de ligger på. Forståelsesnivåene fra SOLO taksonomi er (Biggs & Collis, 1982):

1. Prestrukturelt nivå
2. Unistrukturelt nivå
3. Multistrukturelt nivå
4. Relasjonelt nivå
5. Utvidet abstrakt nivå

Mønstergjenkjenning

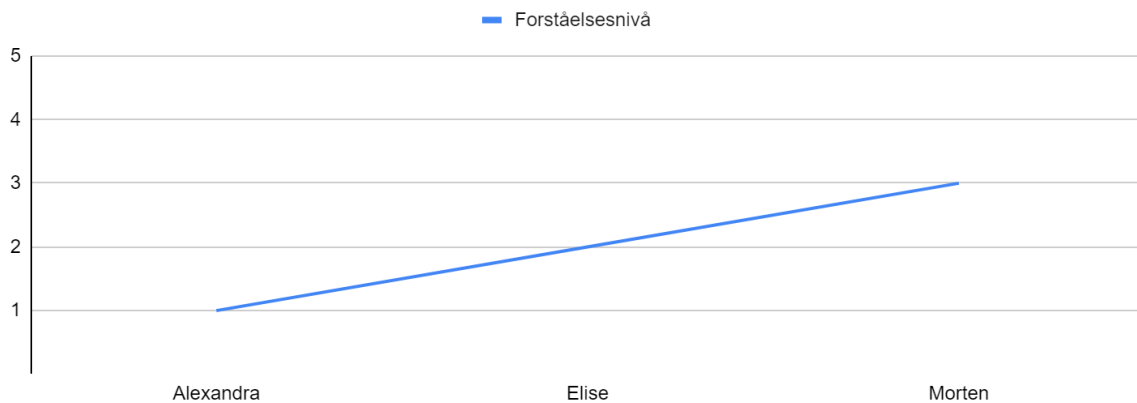


Figur 4.1.1.1: Forståelsesnivået til elevene som bruker MG for å løse problemet «Å telle kvadrater».

Elevene som bruker mønstergjenkjenning har et forståelsesnivå som ligger generelt høyt på taksonomiskalaen. Bakgrunnen for at disse fire elevene jevnt over havner høyt på skalaen, er fordi de har benyttet seg av MG på en gunstig måte i løsningen av problemet. Alle fire benytter seg av MG for å forstå hvordan figurene endrer seg i rekken. Som regel leter elevene etter noen konsekvente endringer, som oppfører seg likt mellom hver figur. Når de finner ny informasjon som vurderes til å være nyttig, brukes den likevel på ulike måter av elevene. Thomas ser etter mønster ved å telle i hodet og beskriver ikke mønsteret ytterligere. Tuva mestrer å bruke mønsteret til å produsere en formel som beskriver det. Tuva utnytter strategien og bruker den mer aktivt i problemløsningen enn Thomas. Det vitner om at Tuva forstår hvordan MG kan brukes som et verktøy for å komme seg videre i prosessen. Elevene vi har vurdert til relasjonelt nivå, som Tuva og Turid, utnytter styrkene og egenskapene til

strategiene og kombinerer dem for å komme frem til løsninger. Begge har benyttet seg av to ytterligere strategier som komplimenterer MG.

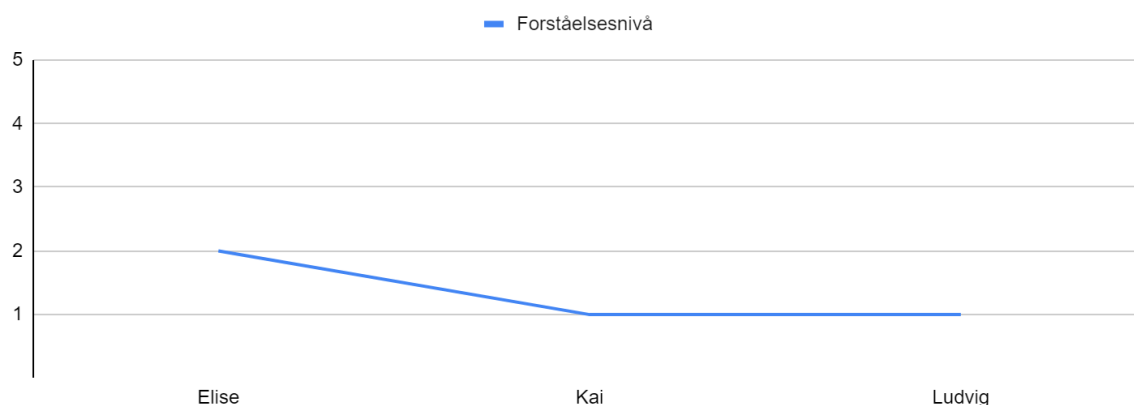
Lage visuell representasjon



Figur 4.1.1.2: Forståelsesnivået til elevene som bruker LVR for å løse problemet «Å telle kvadrater».

Å lage en visuell representasjon har vist seg å være en lite hensiktsmessig strategi for å løse dette problemet. Strategien fører ikke til tilfredsstillende løsninger, og elevene oppnår lite i problemløsningsprosessen ved å bruke den. Alexandra, Elise og Morten begynner problemløsingen med å tegne neste figur i rekken. Morten ser raskt at det å tegne vil ta for lang tid, og vurderer derfor andre strategier som mer hensiktsmessig. Som nevnt bruker Morten andre strategier for å komme frem til en tilfredsstillende løsning. Elise forsøker å tegne, men vurderer også at det vil være mer hensiktsmessig med andre strategier. Hun gjetter derfor tilfeldig for å komme frem til en mulig løsning. Alexandra er den eneste som tegner, og som samtidig mener hun har brukt strategien på en hensiktsmessig måte. Likevel viser besvarelsen at tegningen ikke bidrar til noe nevneverdig i løsningen. Vi finner det interessant at de tre vurderes til ulike forståelsesnivåer. Morten vurderes til multistrukturelt nivå, Elise til unistrukturelt nivå og Alexandra til prestukturelt nivå. Hvordan elevene bruker LVR påvirker altså hvilket nivå vi har vurdert dem til i taksonomien. Morten er totalt sett vurdert til et høyere forståelsesnivå i dette problemet, fordi han mestrer de andre strategiene godt.

Tilfeldig gjetting og testing



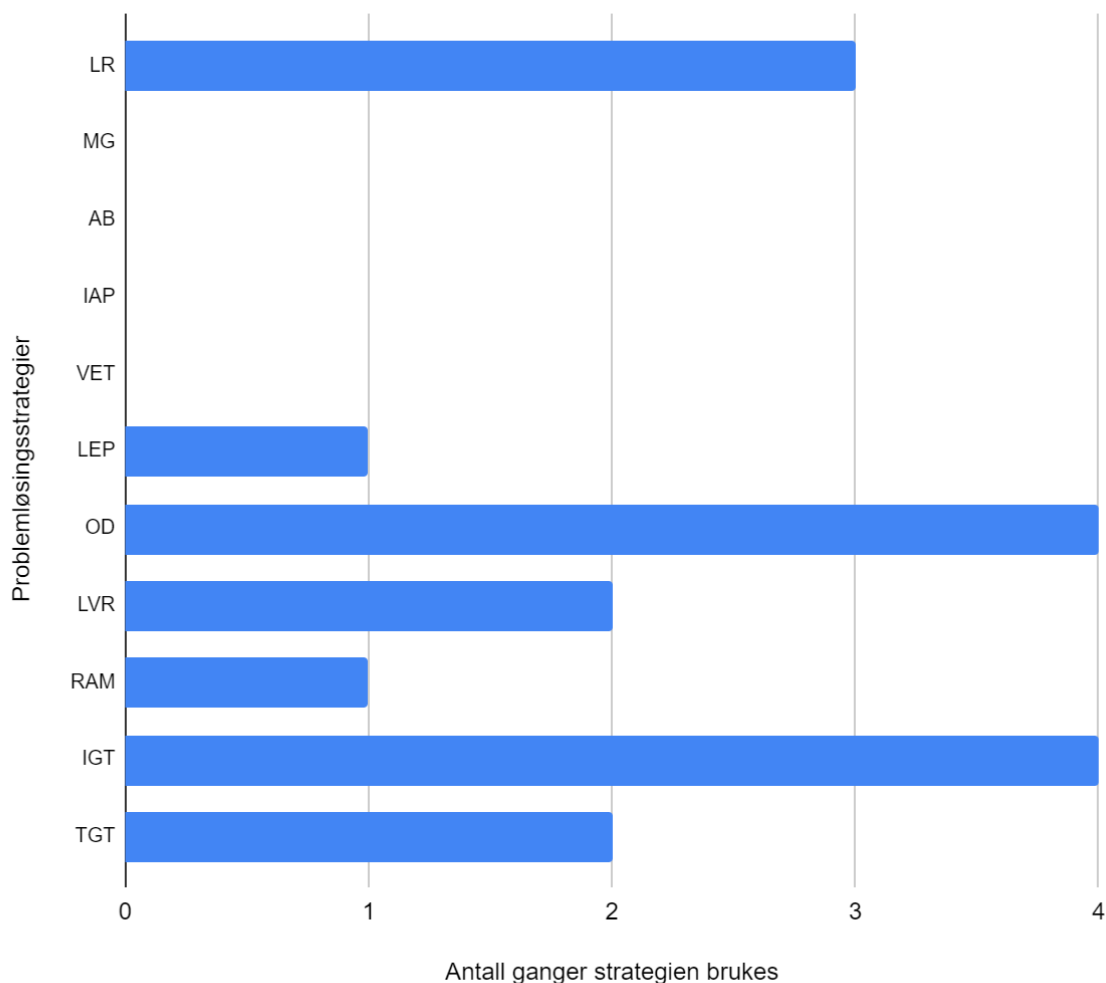
Figur 4.1.1.3: Forståelsesnivået til elevene som bruker TGT for å løse problemet «Å telle kvadrater».

Å gjette og teste tilfeldig (TGT) vitner stort sett om prestrukturell forståelse for hvordan man kan løse problemet. Elevene mestrer ikke å gjøre vurderinger knyttet til hvilke variabler som er hensiktsmessig eller unødvendige å teste ut. Når elevene bruker TGT, er det fordi de ikke er sikre på hvordan de skal løse problemet. Som regel brukes strategien som en siste utvei. Hvis de er nære ved å gi opp, gjetter de og tester ut en tilfeldig og lite begrunnet løsning.

4.2 Bestefars tiere

Problemet innebærer å finne én eller flere kombinasjoner av store og små barnebarn bestefaren kan ha. Her bruker elevene et bredt spekter av ulike strategier for å komme frem til løsninger. Likevel er det fire strategier som ikke benyttes; MG, AB, IAP og VET. De andre strategitypene brukes med ulik hyppighet, hvor OD og IGT brukes hyppigst.

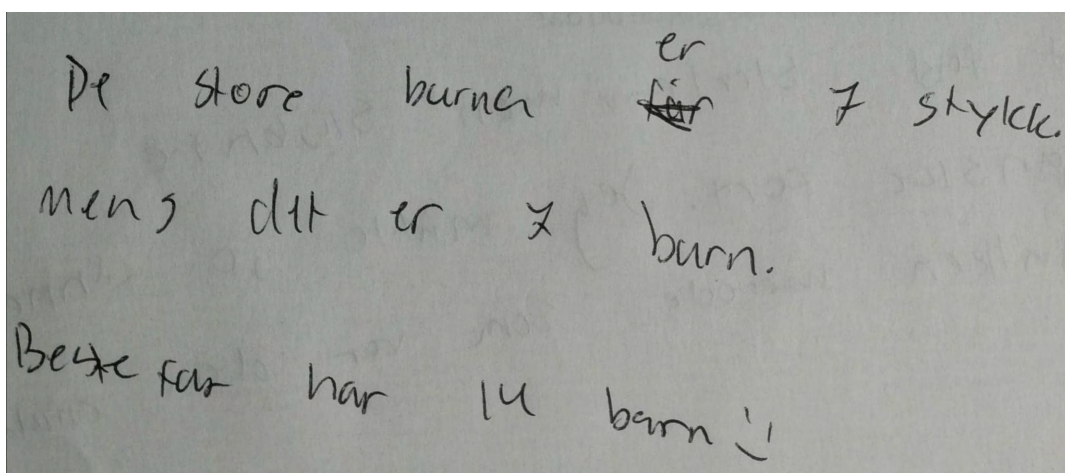
Bestefars tiere



Figur 4.2.1: Stolpediagram som viser antall ganger problemløsningsstrategiene benyttes for å løse problemet «Bestefars tiere».

Det er mange som forsøker en form for gjetting og testing for å løse dette problemet. Totalt sett har seks av åtte elever forsøkt enten intelligent (IGT) eller tilfeldig (TGT) gjetting og testing. Kai, Tuva, Alexandra og Ludvig bruker kun IGT eller TGT uten å kombinere med andre strategier. Likevel er strategien til god hjelp for Kai og Tuva, som begge kommer frem til tilfredsstillende løsninger. Alexandra og Ludvig, som vi vurderer til prestrukturelt nivå, viser lite i sine besvarelser. Begge bruker TGT uten at det bidrar til en tilfredsstillende løsning. Selv om begge elevene forteller at de har forsøkt å bruke gangetabellen som verktøy, bærer løsningsforslagene preg av at de ikke forstår hvordan de kan bruke gangetabellen

hensiktsmessig. Begge forsøker kun én kombinasjon av store og små barnebarn, og ingen av dem viser at de har gått tilbake og sjekket om løsningen kan være korrekt.

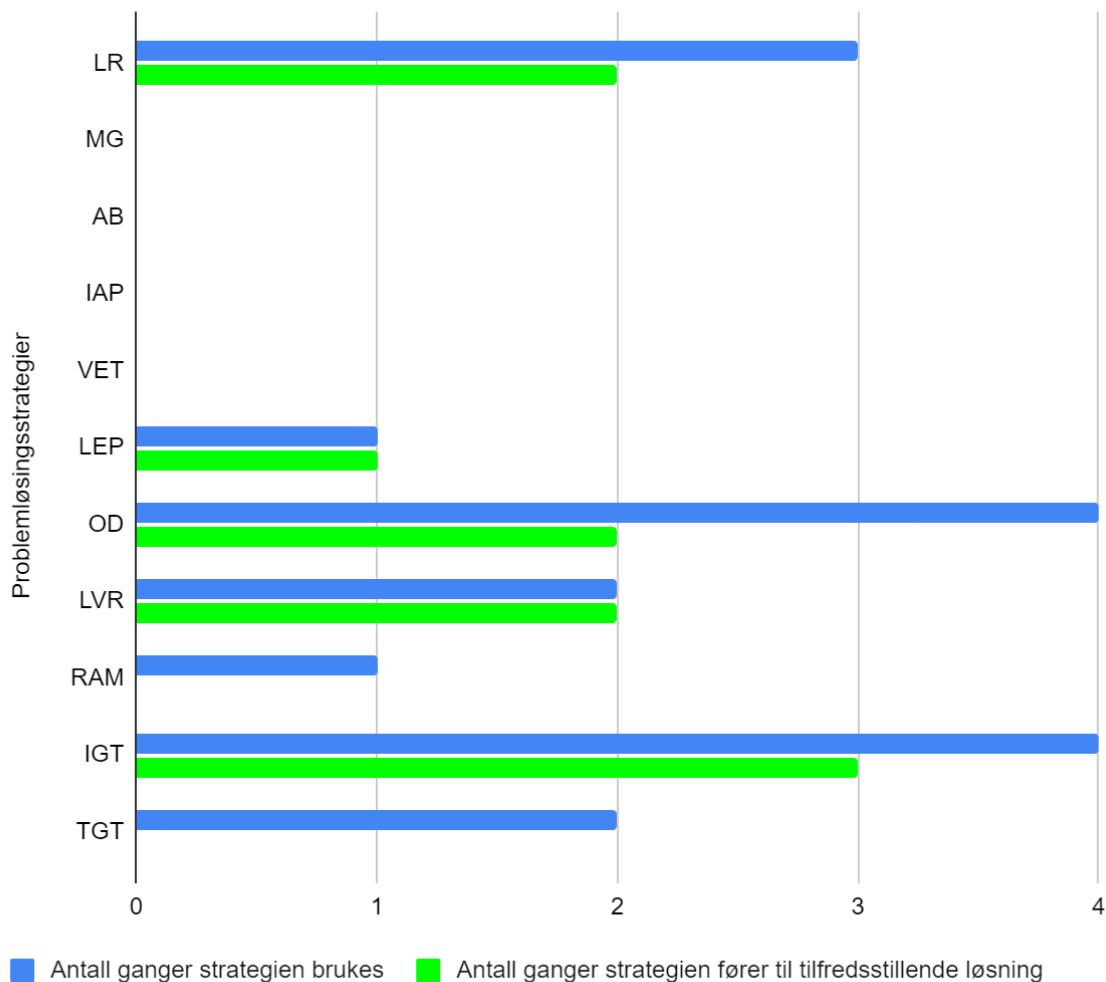


De store barnen er ~~får~~ 7 stykke.
men, det er 2 barn.
Beate far har 14 barn :)

Figur 4.2.2: Alexandra sitt løsningsforslag viser ingen utregning og er et godt eksempel på TGT. Selv om hun kan ha forsøkt å regne ut i hodet, er besvarelsen preget av at hun har gjettest seg frem til et tilfeldig svar.

I dette problemet fører ikke TGT elevene videre i problemløsningsprosessen, og heller ikke til tilfredsstillende løsninger. Her ser vi en tydelig forskjell på hvordan intelligent og tilfeldig gjetting og testing ser ut. Av de fire som bruker IGT, og som dermed gjør en intelligent vurdering av hva som kan være hensiktsmessig å teste ut som potensielle løsninger, kommer tre av de frem til tilfredsstillende løsninger. Altså er det vesentlig at elevene reflekterer over hvilke variabler som er unødvendige å teste ut. Ved å skille ut irrelevante variabler, hjelper det elevene å beholde oversikt i problemet. Når vi vurderer elevenes strategibruk som IGT, og ikke TGT, vitner det om at de har gjort denne vurderingen før de tester ut variablene.

Bestefars tiere

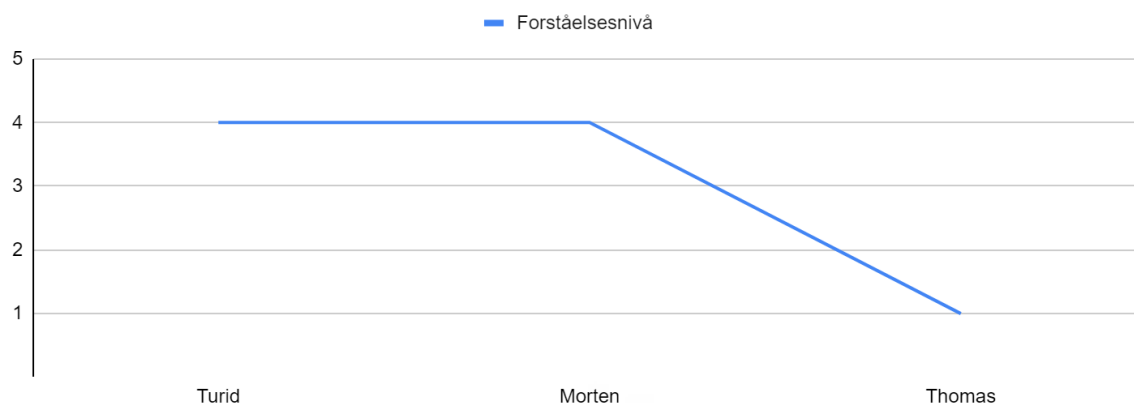


Figur 4.2.3: Stolpediagram som viser antall ganger en strategi brukes og antall ganger strategien fører til en tilfredsstillende løsning på problemet «Bestefars tiere».

Av strategiene som brukes for å løse dette problemet, bidrar nesten alle til noe i problemløsningsprosessen for elevene. Det er kun RAM og TGT (som nevnt) som ikke fører til tilfredsstillende løsninger. Elise bruker RAM ved å liste opp alle mulige multipler av 3 som kan adderes med 7 og få 65. Hun kommer ikke helt i mål, og kunne med fordel også laget en liste over multipler av 7.

4.2.1 Forståelsesnivåer

Logisk resonnement

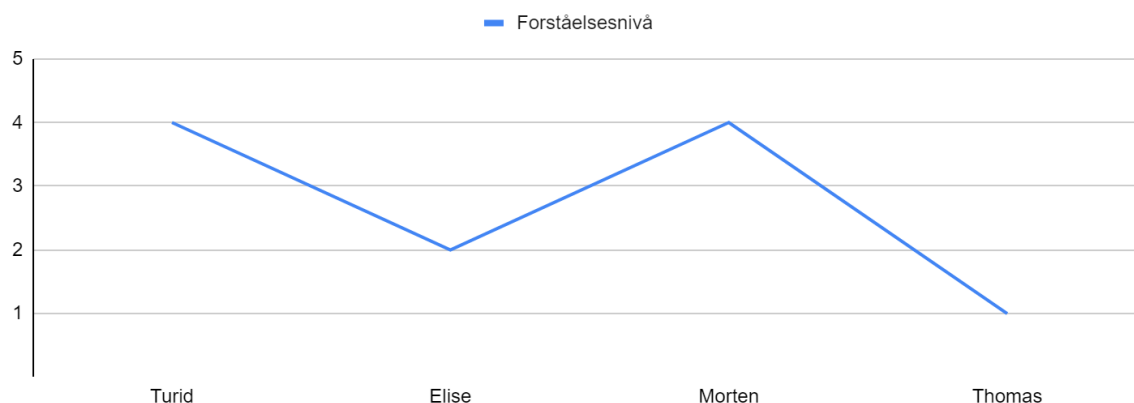


Figur 4.2.1.1: Forståelsesnivået til elevene som bruker LR for å løse problemet «Bestefars tiere».

De som bruker LR begynner problemløsingen med å reflektere over noen premisser ved informasjonen som gis i problemet. Elevene tar utgangspunkt i ulik informasjon, og dette påvirker også den videre prosessen. Thomas resonnerer seg frem til at han må dele opp 650 i to, slik at han får to grupper med variabler å forholde seg til. Turid bruker LR for å kunne dele opp og forenkle problemet (LEP). Hun ser at 3 og 7 er tiervenner, og tar vare på informasjonen til neste del av problemet. Der ser hun at 35 går opp i 7-gangen. Hun deler derfor 65 i leddene $3 \cdot (3+7)$ og 35. Fra utsagnene kommer hun fram til en konklusjon om at det kan være 5 store barn og tre små barn. Morten resonnerer også at løsningen må ha noe med gangetabellen og gjøre. Derfor konkluderer han med at han kan forsøke å kombinere tall i 3- og 7-gangen for å komme frem til en løsning. Altså starter alle tre med et resonnement som setter i gang med problemløsingen. LR brukes her tidlig i prosessen for å finne potensielle veier videre som kan føre til løsninger.

Bruken av LR i kombinasjon med andre strategier påvirker vår vurdering av hvilket forståelsesnivå elevene har. Turid og Morten starter med gode resonnementer som bidrar til å føre dem videre i problemløsningsprosessen. Thomas har også resonnert, men konkluderer med et premiss som ikke hjelper han i problemløsingen. Løsningsforslaget preges av at han tar utgangspunkt i noe som ikke er særlig godt matematisk begrunnet, og dermed kommer han heller ikke frem til noen tilfredsstillende løsning. Dette er i hovedsak grunnen til at vi vurderer Thomas til prestrukturelt nivå.

Organisere data



Figur 4.2.1.2: Forståelsesnivået til elevene som bruker OD for å løse problemet «Bestefars tiere».

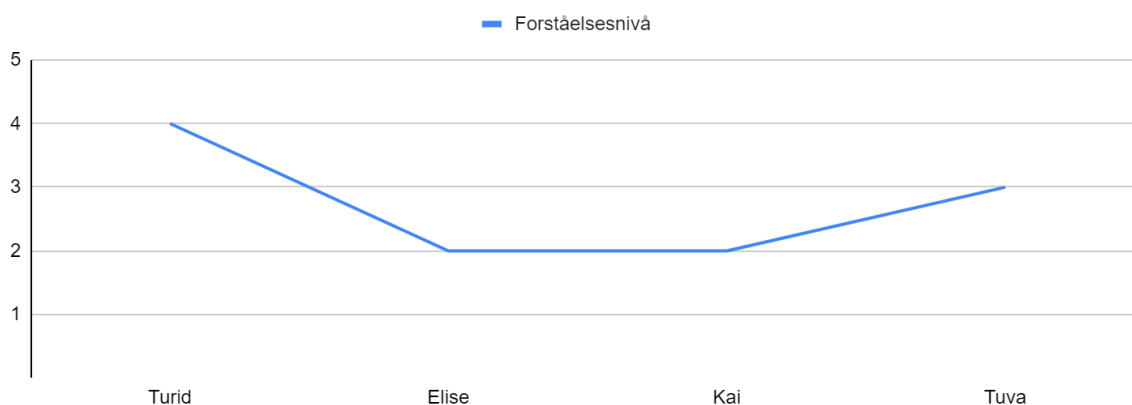
Når elevene organiserer dataene (OD) i dette problemet, forsøker de å liste opp informasjon som kan hjelpe dem videre. De fleste lister opp ulike tall i 3- og 7-gangen, for å sjekke om det er mulig å summere to av tallene for å få 65. Turid og Morten organiserer eksepsjonelt godt med ryddighet og god systematikk som hjelper dem å komme frem til tilfredsstillende løsninger. Deres tydelige kontroll over organiseringen, i kombinasjon med andre strategier, bidrar til at vi vurderer dem til relasjonelt nivå.

De Store			De Små		
barneborn	1	7	born	1	3
barneborn	2	7-14	born	2	3-6
barneborn	3	7-21	born	3	3-9
barneborn	4	7-28	born	4	3-12
barneborn	5	7-35	born	5	3-15
barneborn	6	7-42	born	6	3-18
barneborn	7	7-49	born	7	3-21
barneborn	8	7-56	born	8	3-24

Figur 4.2.1.3: Morten sin organisering av dataene (OD) er ryddig og oversiktlig, og hjelper ham til å se løsninger. Han organiserer på en slik måte at det tydelige skillet mellom store og små barn fremstår som en visuell representasjon (LVR) som han drar nytte av.

Thomas sin organisering fremstår veldig tilfeldig, og strategien hjelper han ikke videre i prosessen. Elise organiserer noe bedre enn Thomas, men mangler likevel ryddighet og systematikk som kunne hjulpet henne å se kombinasjonene som kan gi 65. Hun er nære en korrekt løsning, men fordi hun ikke mestrer bruken av strategien, kommer hun heller ikke helt i mål. Informasjonen hun får ut av strategiene, tas ikke med videre i prosessen. Vi vurderer derfor at hun er på unistrukturelt forståelsesnivå.

Intelligent gjetting og testing



Figur 4.2.1.4: Forståelsesnivået til elevene som bruker IGT for å løse problemet «Bestefars tere».

Turid og Elise kombinerer IGT med andre strategier som vi har beskrevet over. Kai og Tuva bruker strategien alene, og begge kommer frem til tilfredsstillende løsninger. Likevel vurderer vi Tuva til et høyere forståelsesnivå enn Kai, på bakgrunn av hennes forklaring av hvordan hun utelukker variabler som hun mener er irrelevante å teste ut. Hun trekker frem flere premisser enn Kai, som tydeliggjør hvilke avgrensninger hun setter før hun tester ut variablene.

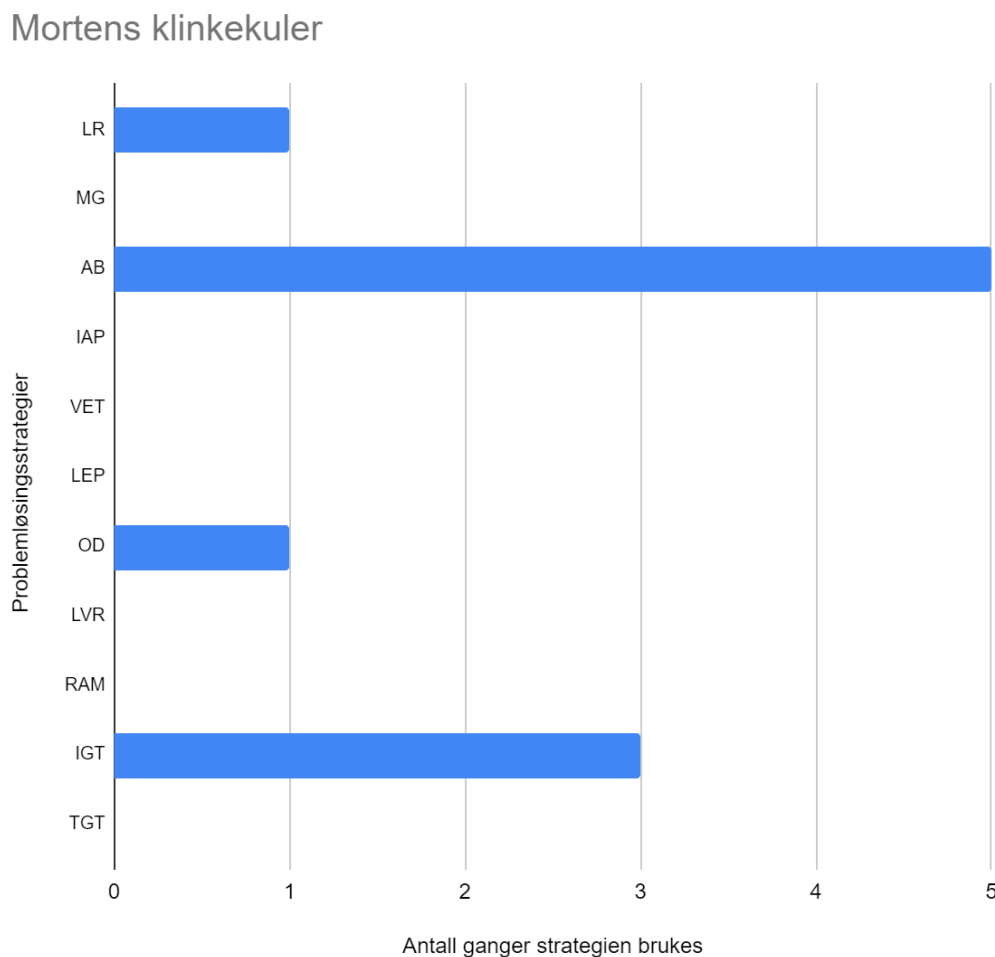
Jeg brukte ~~de~~ prøve/feile metoden.
Jeg sjekket ulike tall som er lavere enn 65, om de gikk opp i 7.
Hvis de gjorde det, sjekket jeg om det resterende tallet gikk opp i 3. På den måten kom jeg fram til tallene 56 og 9. ($56:7=8$, $9:3=3$, $8+3=11$)

Figur 4.2.1.5: Tuva skriver at hun bruker «prøve og feile-metoden», som er et synonym gjetting og testing. På denne måten er hun svært bevisst på hvordan hun bruker strategien og samtidig at hun har erfaring med å bruke den.

Kai sin bruk av strategien bærer preg av at han går for den første mulige løsningen som han kommer på. Han forklarer at han fant tall i 7-gangen som kunne kombineres med tall i 3-gangen.

4.3 Mortens klinkekuler

Problemet går ut på at Morten spiller med klinkekuler i friminuttene på skolen. I noen av friminuttene taper han klinkekuler, mens i andre vinner han. Elevene skal forsøke å finne ut hvor mange klinkekuler Morten hadde før han begynte å spille. Ut i fra diagrammet nedenfor ser vi at den strategien som ble brukt hyppigst var arbeide baklengs (AB). Av totalt åtte besvarelser brukte fem elever av denne strategien. I tillegg er det tre elever som har brukt intelligent gjetning og testing (IGT). Logisk resonnement (LR) og å organisere data (OD) ble benyttet en gang hver. Altså er det syv strategier som ikke har blitt brukt for å løse dette problemet.

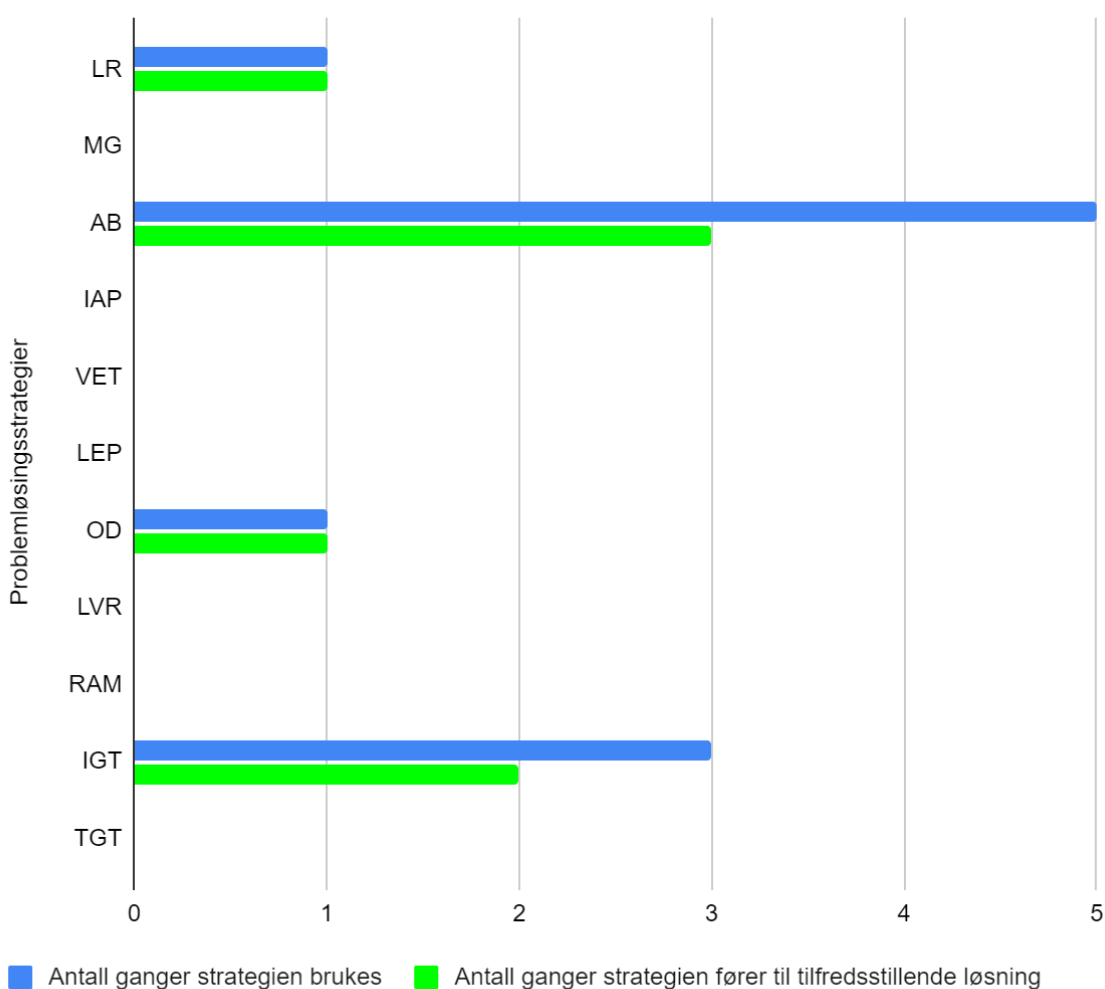


Figur 4.3.1: Stolpediagram som viser antall ganger problemløsningsstrategiene benyttes for å løse problemet «Mortens klinkekuler».

Fem av elevbesvarelsene leverer tilfredsstillende løsninger. Seks elever har kun brukt én strategi for å løse dette problemet. De to elevene som bruker flere enn én strategi kommer

frem til tilfredsstillende løsninger. Halvparten av de seks som bruker én strategi produserer også tilfredsstillende løsninger. Ut i fra dette fremstår det mest hensiktsmessig å kombinere strategier for å løse dette problemet. De som kun bruker én strategi vurderer den de har valgt som den mest hensiktsmessige.

Mortens klinkekuler



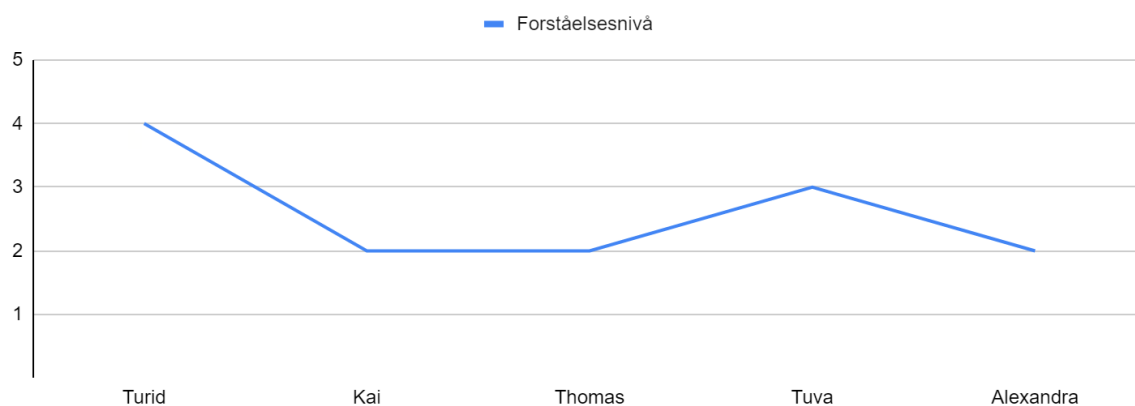
Figur 4.3.2: Stolpediagram som viser antall ganger en strategi brukes og antall ganger strategien fører til en tilfredsstillende løsning på problemet «Mortens klinkekuler».

4.3.1 Forståelsesnivåer

Elevene bruker som nevnt færre strategier enn i de to tidligere problemene. Et vesentlig kriterium for å oppnå multistrukturelt forståelsesnivå eller høyere, er evnen til å kombinere og dra nytte av flere strategier samtidig. I dette problemet bruker de fleste av elevene kun én strategi, og dermed fører det til at flere vil bli vurdert til et lavere forståelsesnivå. Likevel

påvirkes vår vurdering av elevenes forståelse av deres evne til å mestre og utnytte den éne strategien de har valgt. Dersom en elev aktivt velger bort strategier, og vurderer én enkelt strategi som svært hensiktsmessig å bruke alene, vil det fremdeles foreligge grunnlag for å vurdere til multistrukturelt nivå eller høyere.

Arbeide baklengs



Figur 4.3.1.1: Forståelsesnivået til elevene som bruker AB for å løse problemet «Mortens klinkekuler».

Når elevene arbeider baklengs (AB) gjennomfører de regneoperasjoner i motsatt rekkefølge av informasjonen som gis i problemet. Eksempelvis når den siste informasjon i problemet handler om at Morten taper halvparten av klinkekulene og ender opp med 13, starter alle elevene problemløsingen med å doble 13 til 26. Forskjellene på elevenes forståelsesnivå kommer til syne gjennom hvordan de bruker strategien videre. Turid og Tuva, som har høyere forståelsesnivå enn resten av elevene som bruker AB, viser en trygghet og selvsikkerhet i arbeidet. Begge er tydelige på hvor de er i prosessen når de gjennomfører de ulike regneoperasjonene, noe som hjelper dem til å beholde oversikt i problemet.

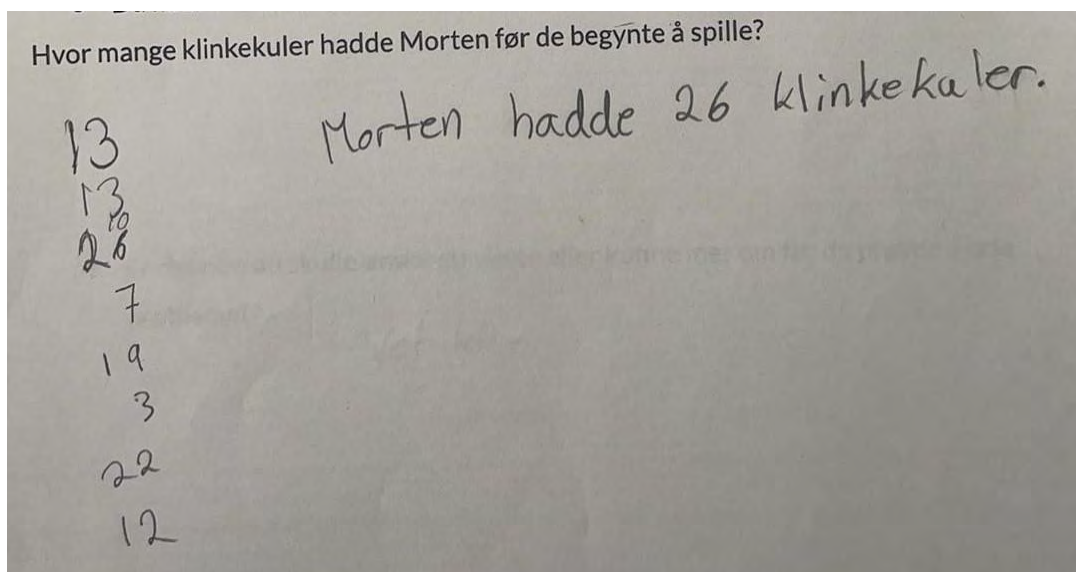
The image shows a student's handwritten work on a math problem. It consists of four arithmetic operations written in a simple, slightly shaky hand, followed by a sentence. The operations are: $13 \cdot 2 = 26$, $26 - 3 = 23$, $23 + 7 = 30$, and $30 : 2 = 15$. Below these, the sentence "Morten hadde 15 klinketuler før de startet å spille" is written and underlined twice.

$$13 \cdot 2 = 26$$
$$26 - 3 = 23$$
$$23 + 7 = 30$$
$$30 : 2 = 15$$

Morten hadde 15 klinketuler
før de startet å spille

Figur 4.3.1.2: Tuva sitt løsningsforslag på problemet «Mortens klinketuler». Elevbesvarelsen bærer preg av trygghet og ryddighet som gjør at Tuva vurderes til multistrukturelt forståelsesnivå.

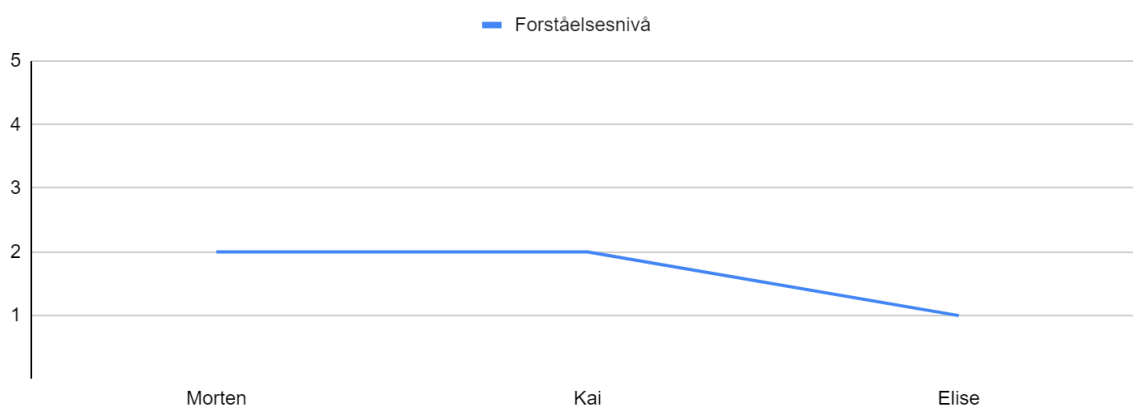
Fellestrekkene i besvarelsene til Kai, Thomas og Alexandra er at de viser mindre ryddighet og oversiktighet når de arbeider baklengs (AB). Alexandra er godt på vei til å mestre strategien og kommer også frem til et tilfredsstillende svar. Likevel misbruker hun likhetstegnet i prosessen, og helhetsinntrykket påvirker forståelsesnivået vi vurderer henne til. Kai og Thomas er utydelige når de noterer regneoperasjonene, og mister relevant informasjon på veien. For Thomas sin del fører det til at han ikke kommer frem til korrekt løsning. Kai bestemmer seg i stedet for å bruke andre strategier.



Figur 4.3.1.3: Thomas viser hvordan han har forsøkt å arbeide baklengs (AB) for å løse problemet «Mortens klinkekuler».

Det er likevel et tydelig skille i forståelsesnivået til de som velger AB og de som velger IGT. For at elevenes strategibruk skal vurderes til *intelligent* (IGT) og ikke *tilfeldig* (TGT) gjetting og testing i dette problemet, kreves det at de har gjennomført en vurdering av hvilke verdier som har et potensiale til å være korrekt løsning. Altså at elevene ikke gjetter uten å sette grenser for hvilke verdier som bør testes ut.

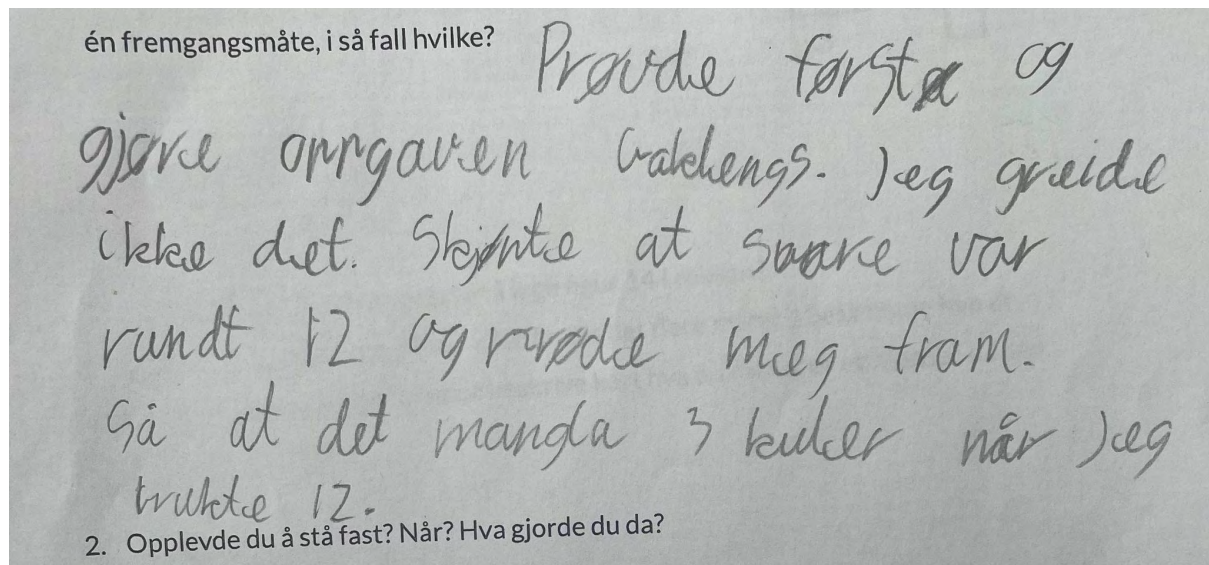
Intelligent gjetting og testing



Figur 4.3.1.4: Forståelsesnivået til elevene som bruker IGT for å løse problemet «Mortens klinkekuler».

De som bruker IGT for å løse problemet vurderer at korrekt løsning må ligge i nærheten av 15, og tester dermed ut ulike verdier som ligger nær 15. Et godt eksempel på en slik

vurdering gjør Morten gjennom sin avgrensning av verdier som bør testes ut. Han tester ut verdier fra ti og oppover, helt til han kommer frem til løsningen. Kai vurderer på en annen måte, og starter først med å teste ut tolv fordi det ligger nær 13. I utregningen ser han at han ender opp med ti klinkekuler og ikke 13. Dermed vurderer han at korrekt løsning må starte med tre flere klinkekuler enn tallet han først prøvde. Slik kommer han frem til 15 som korrekt løsning.

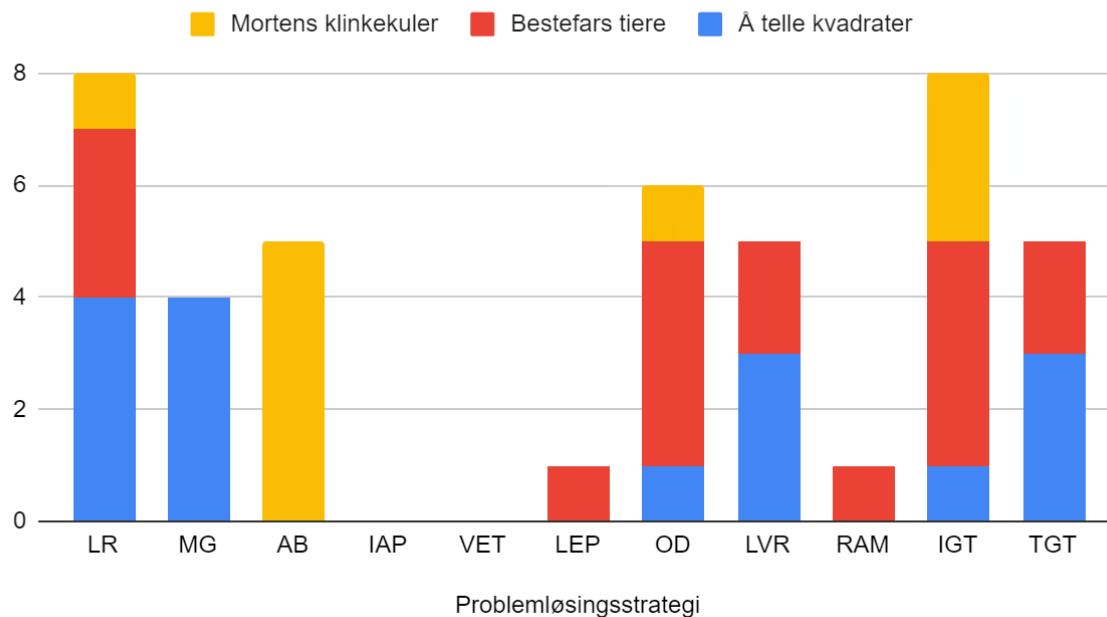


Figur 4.3.1.5: Kai forklarer hvordan han forsøkte å løse problemet «Mortens klinkekuler».

4.4 Oppsummering av problemløsningsoppgavene

Problemene i forskningen vår er ulike og gir grunnlag for forskjellige løsningsstrategier. Et annet sett med problemer vil kunne gi en annen spredning i anvendelse av strategier. Likevel ønsker vi å presentere noen funn som representerer helheten av elevenes bruk av problemløsningsstrategier. Under følger en oversikt over elevenes strategibruk i alle problemløsningsoppgavene samlet.

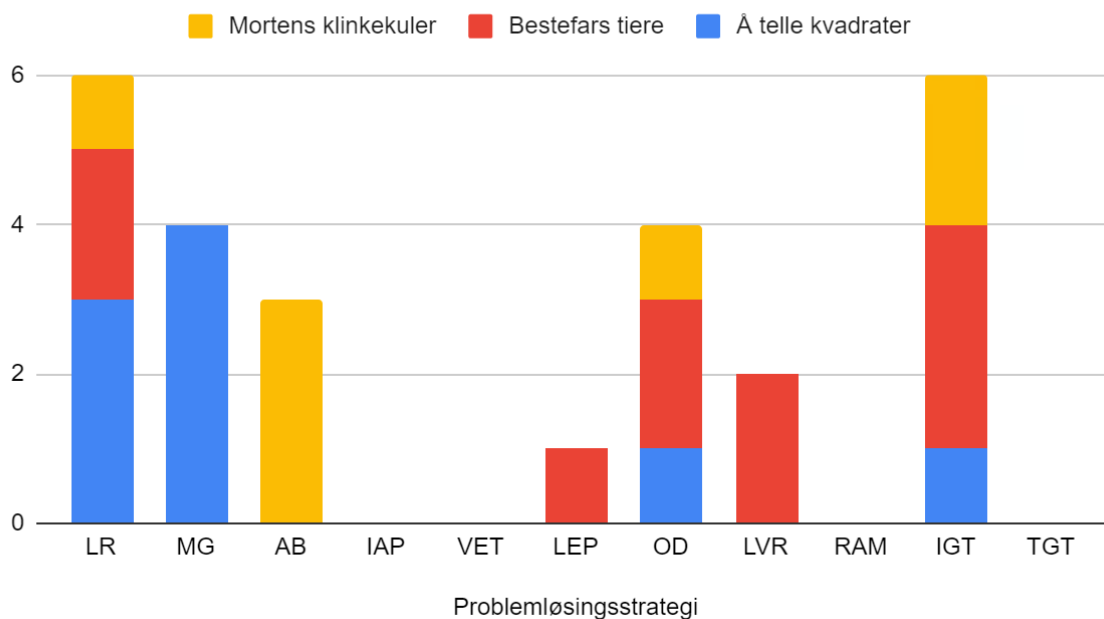
Antall ganger en strategi brukes



Figur 4.4.1: Søylediagram som viser antall ganger strategiene brukes i alle problemløsningsoppgavene.

Ut i fra diagrammet ovenfor ser vi at elevene har benyttet seg av flere ulike strategier i arbeidet med de tre ulike problemene. IAP og VET benyttes ikke som strategi i noen av problemene. LEP og RAM er kun benyttet én gang hver, og begge forekommer i «Bestefars tiere». Noe annet som er interessant å trekke ut i fra diagrammet, er at det er tre strategier som har blitt benyttet i alle problemene: Logisk resonnement (LR), Organisere data (OD) og Intelligent gjetting og testing (IGT). Vi bemerker oss spesielt at LR og OD alltid kombineres med andre strategier.

Antall ganger en strategi fører til tilfredsstillende løsninger



Figur 4.4.2: Søylediagram som viser antall ganger strategiene fører til tilfredsstillende løsninger i alle problemløsningsoppgavene.

I fig. 4.4.2 ser vi hvilke strategier som har ført til tilfredsstillende løsninger. Logisk resonnement (LR) og intelligent gjetting og testing (IGT) er de to som skiller seg ut ved at hver av de har ført til seks tilfredsstillende løsninger av åtte mulige. Et moment vi ønsker å trekke frem som interessant er at tilfeldig gjetting og testing (TGT) ikke har ført til noen tilfredsstillende løsninger, selv om det har blitt benyttet fem ganger (ref. fig. 4.5.1). Det er kun to av strategiene som brukes som ikke fører til tilfredsstillende løsninger; RAM og TGT. Ettersom RAM kun brukes én gang i løpet av alle elevbesvarelsene, finner vi ikke denne nevneverdige interessante å drøfte videre. Mønsterkjennelse (MG) og løse et enklere problem (LEP) er også verdt å nevne at hver gang strategien har blitt benyttet, har den ført til en tilfredsstillende løsning. Totalt sett brukes de ulike strategiene 17 ganger uten at det fører til tilfredsstillende løsninger.

4.5 Intervju

I dette underkapittelet presenteres funnene fra intervjuet vi utførte med matematikklæreren til klassen vi gjennomførte casestudien i. Målet med intervjuet var å få et inntrykk av elevenes kunnskap om og med problemløsning. Relevante spørsmål om hvordan elevene har arbeidet med problemløsning tidligere og hvilke forkunnskaper de har, er til hjelp når vi senere skal drøfte elevenes besvarelser opp mot teori.

Læreren gir uttrykk for at han ikke har arbeidet direkte med problemløsningsoppgaver med denne klassen tidligere. Likevel presiserer han at de har brukt andre metoder som kan minne om og har mye til felles med problemløsning. Slik sett har elevene arbeidet mer indirekte med problemløsning. Derfor kan det være at de vet hva problemløsning handler om, men de vet ikke at det ofte blir omtalt som *problemløsning*. Læreren forklarer at når elevene arbeider med oppgaveløsning, så pleier han å gjennomføre en fast prosedyre som skal hjelpe alle elevene til å kunne løse oppgaven. Han viser et eksempel for elevene i fellesskap, før de får arbeide med et liknende eksempel selv.

«hvis det er litt mer komplisert, at det er flere steg og de må tenke litt over hvorfor man gjør det man gjør, da pleier jeg å dra inn en slags refleksjonsbit i midten..»

Han forteller videre at han ofte stiller åpne spørsmål i denne delen som skal hjelpe elevene til å reflektere. Her presiserer han at fokuset i refleksjonen er at de forsøker å komme fram til ulike fremgangsmåter i fellesskap som kan benyttes i nye oppgaver.

En annen metode han bruker i undervisningen, som han sier kan minne om problemløsningsoppgaver er *Same Surface, Different Deep Structures* (SSDD-oppgaver). Han forteller at ved slike oppgaver tar man utgangspunkt i et enkelt matematisk prinsipp, som man angriper fra ulike perspektiver. På denne måten kan man variere hvilke løsningsstrategier man benytter seg av for å løse det samme problemet. Elevene får dermed et bredt innblikk i hvilke strategier som kan brukes i ulike situasjoner. Eksempelvis får elevene utdelt en trekant med et matematiske prinsipp i midten. I hjørnene av trekanten beskrives tre ulike problemer som elevene skal forsøke å løse. Slik sett får elevene innblikk i ulike typer problemer innenfor den samme tematikken.

Den siste konkrete metoden han nevner omtaler han som «målløse oppgaver». Han forklarer det slik at man får tildelt all informasjon man trenger, uten at det gis konkrete retningslinjer for hvordan oppgaven skal løses. Derimot spør oppgaven på en åpen måte etter ulike løsninger. Han gir følgende eksempel: «*Finn ut tre ting om denne grafen, denne figuren eller om det diagrammet her*». Videre utdyper han at ved denne type oppgaver arbeider elevene med ulike operasjoner, og benytter seg av ulike løsningsstrategier for å løse oppgavene.

Læreren forteller at anvendelsen av ulike løsningsstrategier varierer fra elev til elev. Han er usikker på om elevene mestrer å kombinere løsningsstrategier, og sier følgende:

«Noen gjør nok det ... vi har jobbet litt mindre åpent, at vi fokuserer på en ting av gangen, for at de skal få en verktøykasse som dem kan benytte seg av senere.»

Altså dekker undervisningen i hovedsak én og én strategi av gangen. Han beskriver videre at han ser igjen ulike strategier når elevene arbeider med problemer. En av strategiene som han har sett igjen oftest er visuell representasjon (LVR), ved at elevene for eksempel tegner en figur. I tillegg forekommer det ofte at elevene benytter seg av intelligent gjetting og testing (IGT), og til slutt at de prøver å løse et enklere problem (LEP). Han understreker også at det er et veldig stort sprik i klassen, mellom de som kan benytte seg av flere ulike strategier, til de som kanskje ikke helt vet hvordan de skal angripe ulike oppgaver.

Utover i intervjuet blir løsningsstrategiene vi bruker i forskningen presentert for læreren, slik at han enklere kan kommentere hvorvidt elevene kan ha kjennskap til noen av disse. Da trekker han frem følgende: «*Jeg tenker kanskje logisk resonnement [LR], men da sett i sammenheng med gjetning [IGT eller TGT]*». Han forventer at flere av elevene vil benytte seg av flere av strategiene samtidig når de skal løse problemene i forskningen vår. Nå trekker han fram logisk resonnement (LR) og å organisere data (OD) som sannsynlig at elevene ofte vil bruke i kombinasjon med andre strategier. Eksempelvis nevner han at man for å kunne avgrense den intelligente gjetningen (IGT) sin, må en form for logisk resonnement finne sted. Han forklarer følgende om organisering av data (OD): «*Å sortere data er jo veldig bredt da, så jeg regner jo med at jeg underbevisst har sett det ganske mange ganger*». Han utdyper med et eksempel; om man får utdelt ulike figurer med lengder og vinkler, vil man sortere disse for å skaffe oversikt. Han forventer at mange elever vil benytte seg av denne strategien i løsningene av problemene.

Lærerens forventninger til hvordan elevene velger strategier forklares på følgende måte:

«Det varierer jo da men, at elevene litt underbevisst... veldig mange som får en oppgave tenker at dette har jeg ikke noen plan på. At de heller forsøker de som ligger naturlig for dem, som de benytter seg av ellers i livet».

Han trekker fram intelligent gjetting og testing (IGT) og logisk resonnement (LR) som strategier man benytter seg av i andre situasjoner i livet. Derfor er det naturlig for elevene å benytte seg av disse strategiene. Derfor tror han at de som ikke har noen klar plan eller strategi for problemløsingen, vil benytte seg av disse. Han poengterer likevel at vi trolig vil komme til å se et bredt spekter av strategier i elevbesvarelsene.

5.0 Diskusjon

Hensikten med studien er å rette søkelyset mot hvordan et utvalg ungdomsskoleelever anvender problemløsningsstrategier i møte med problemløsningsoppgaver. På bakgrunn av dette har vi arbeidet ut ifra følgende problemstilling: «Hvilke løsningsstrategier bruker tiendeklassinger i problemløsning, og hvordan bidrar strategiene til å komme frem til løsninger?» Her skiller vi mellom to hovedelementer i forskningen vår. I analysen har vi vurdert hvilke strategier elevene bruker og hvilke som fører til tilfredsstillende løsninger. I dette kapittelet vil vi ta for oss og drøfte interessante funn, med problemstillingens to deler som hovedfokus. Vi diskuterer hvilke momenter som kan påvirke elevenes valg av strategier, hvordan strategiene fører til løsninger, og hvordan elevenes forståelse kan ha en påvirkningskraft i arbeidet med problemløsningsstrategier.

5.1 Valg av strategier

Elevene skulle løse tre ulike problemløsningsoppgaver. Problemenes ulike ordlyd, formulering og omfang gjør at enkelte strategier vil være mer hensiktsmessig å bruke, og påvirker derfor elevenes valg av løsningsstrategier. Vi forsøker å diskutere hvilke strategier som er mest hensiktsmessige å bruke for å løse utvalget av problemer i vår forskning. Et aspekt vi vil drøfte nærmere er hvordan oppgavens ordlyd kan føre til at noen strategier forekommer oftere enn andre.

5.1.1 Å telle kvadrater

I det første problemet som elevene forsøkte å løse, «Å telle kvadrater», skulle elevene finne ut hvor mange kvadrater og hjørner figur 14 i rekken vil bestå av (jf. figur 3.2.1.1). Her kan man argumentere for at problemløsningsoppgavens ordlyd fremmer bruk av mønstergjenkjenning (MG) og lage en visuell representasjon (LVR). Fordi navnet vi har gitt problemet insinuerer at man skal telle kvadrater, kan en elev tolke det slik at en tilfredsstillende løsning må innebære at man teller noe. Hvis man drar videre på den tankegangen, vil det at man teller de ulike kvadratene etterhvert føre til at man arbeider med mønstergjenkjenning (MG). Dette var også noe vi så igjen i de elevbesvarelsene som fikk en tilfredsstillende løsning (jf. figur 4.1.4). Som tidligere drøftet i metodekapittelet, vil problemets ordlyd avgrense hvilke strategier som er hensiktsmessige. Slik sett utelukkes en

del andre strategier. Eksempelvis vil det være lite intuitivt å benytte seg av strategien å arbeide baklengs (AB) for å løse dette problemet.

Elevene Turid, Tuva og Morten produserer tilfredsstillende løsninger på problemet med en kombinasjon av strategiene mønstergjenkjenning (MG) og logisk resonnement (LR). Læreren til elevgruppen forventer at elevene anvender LR i kombinasjon med andre strategier for å komme frem til løsninger. Han trekker frem at elevene bruker logisk resonnement i situasjoner utenfor skolen, og derfor vil det også være naturlig for mange av dem å bruke denne strategien for å løse matematiske problemer. Dette minner om *adaptasjon* i konstruktivismen (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57). Elevene bruker kunnskap om hvordan de resonnerer i hverdagslige problemer, som de tilpasser og overfører til matematiske problemer. På denne måten kan elevene danne nye mentale skjemaer. Når elevene bruker MG som strategi, komplimenterer de med LR for å konkludere om løsningen kan være korrekt. Elevene trekker ut og tolker informasjon som gis i problemet, slik at de kan kjenne igjen et mønster, og kombinerer den tolkede informasjonen på en slik måte at de kan danne nye konklusjoner. Dette minner om slik Posamentier og Krulik (2015, s. 1) og Bronkhorst et al. (2020, s. 1676) beskriver strategien.

Som beskrevet over bruker elevene LR for å konkludere om løsningen kan være korrekt. De danner rekker med logiske utsagn etter å ha produsert et løsningsforslag, som videre brukes til å vurdere løsningen. Slik sett hjelper strategien elevene å se tilbake på prosessen. Både Pólya (2014) og Mason og Davis (1991) legger vekt på at den viktigste læringen i problemløsningen er det som skjer etter man har løst et problem. Når man ser tilbake og vurderer om løsningen er et tilstrekkelig eller tilfredsstillende svar på problemet, lærer elevene mye om hvilke strategier som er hensiktsmessige å bruke i ulike problemsituasjoner. Her konstruerer elevene nye mentale skjemaer, og slik blir de bedre rustet til å håndtere fremtidige problemer som ikke eksisterer enda (Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57).

Samtlige elever som klarer å finne et mønster (MG) i dette problemet kommer frem til tilfredsstillende løsninger. Når elevene mestrer å bruke denne strategien på en hensiktsmessig måte ser de regelmessigheter i informasjonen som gis, og tolker den til noe generelt som gjelder for alle figurene. Selv om elevene finner ulike regelmessigheter og mønstre, oppnår likevel alle det samme. Posamentier og Krulik (2015, s. 13) poengterer at MG ofte brukes når man forsøker å forutsi noe som kommer til å skje. Når problemet spør etter hvor mange

kvadrater figur 14 kommer til å ha, er derfor MG en hensiktsmessig strategi å benytte seg av. At alle som bruker MG klarer å løse problemet kan være en tilfeldighet. Og det er ikke sikkert alle ungdomsskoleelever som forsøker å løse dette problemet vil klare det, selv om de bruker MG som en av løsningstrategiene. Likevel tyder analysen på at det er stor sannsynlighet for at elever som forstår at MG er hensiktsmessig for å løse et problem som etterspør en forutsigelse, også vil klare å løse det. Om elevene ikke forstår problemet, vet de heller ikke hvordan de skal løse det (Pólya, 2014). Slik sett kan det å velge MG som strategi være en indikasjon på at problemløseren har forstått hva problemet spør etter. Om elevene viser at de forstår når, hvordan og hvorfor en strategi er hensiktsmessig å bruke, vitner det om relasjonell forståelse (Skemp, 1978). Gjennom disse markørene er det også enklere å avgjøre hvilket forståelsesnivå elevene har.

Tre elever har forsøkt å tegne den neste figuren i rekken (LVR). Alexandra, Elise og Morten bruker LVR som første strategi, men samtlige finner ulike veier videre til løsninger. De tre vurderes således til ulike forståelsesnivåer. Morten begynner med LVR, men vurderer siden at det vil ta for lang tid. Fordi han gjør denne vurderingen vitner det om et høyere forståelsesnivå enn eksempelvis Alexandra. Hun tegner og vurderer at LVR er hensiktsmessig å bruke. Som presentert i analysekapittelet bidrar ikke strategien til noe i problemløsningsprosessen hennes. Alexandra viser dermed liten forståelse for om løsningen hennes kan være tilfredsstillende eller ikke. Crespo og Kyriakides spesifiserer at enkelte elever velger å tegne for å løse problemer, selv når det hverken er effektivt eller hensiktsmessig (2007, s. 118). Når Alexandra hverken mestrer strategien, vurderer andre strategier som hensiktsmessige eller produserer en tilfredsstillende løsning, viser hun hverken forståelse for strategien eller hvordan problemet kan løses. Den helhetlige analysen stemmer overens med prestrukturelt forståelsesnivå (Biggs & Collis, 1982). Vi argumenterer for at Alexandras forståelse er bestående av informasjon som ikke er sammenkoblet. Til sammenligning gjør Morten tydelige vurderinger for hvorfor LVR ikke er hensiktsmessig å bruke for å løse problemet. Selv om han også starter med å tegne, velger han heller andre strategier som mer effektive. Han bruker likevel de andre strategiene spredt, uten å koble de sammen. Slik sett finner vi klare likhetstrekk i Mortens forståelsesnivå med multistrukturelt nivå i SOLO taksonomien, hvor elevene har forståelse for ulike strategier som ikke direkte kombineres (Biggs & Collis, 1982).

5.1.2 Bestefars tiere

I det andre problemet, «Bestefars tiere», skal elevene som nevnt finne ut hvordan man kan fordele 65 tiere på barnebarn, hvorav de små skal få 3 og de store skal få 7 hver (jf. figur 3.2.1.2). Spørsmålet i problemet er hvor mange barnebarn bestefaren kan ha. Til forskjell fra det forrige problemet hadde vi færre forventninger knyttet til hvilke løsningsstrategier elevene kom til å bruke. Altså vil dette problemet legge mindre føringer for hvilke løsningsstrategier som elevene tolker som hensiktsmessige. Dette er også noe vi så igjen da vi vurderte hvilke løsningsstrategier elevene benyttet seg av i dette problemet (jf. figur 4.2.1). Elevene hadde brukt et bredt spekter av løsningsstrategier. Fire benyttet seg av intelligent gjetting og testing (IGT) og to tilfeldig gjetting og testing (TGT). At en så stor andel av de hadde benyttet seg av en eller annen form for gjetting, tolker vi som at elevene ikke umiddelbart finner åpenbare andre strategier som er hensiktsmessige. Kanskje problemets ordlyd ikke legger noen føringer for åpenbare strategier, slik som eksempelvis MG i «Å telle kvadrater».

Av fire elever som fikk et tilfredsstillende resultat, brukte to av de kun IGT som strategi. De fire besvarelsene har i tillegg blitt vurdert til tre ulike forståelsesnivåer. Der elevbesvarelsene tydelig skiller seg fra hverandre er hvordan de benytter seg av IGT. Strategien brukes som nevnt kun der elevene kritisk vurderer hvilke verdier man skal prøve ut i problemet (Posamentier & Krulik, 2015, s. 145). Tuva sin besvarelse bærer preg av at hun nettopp har kritisk vurdert hvilke verdier som kan være relevante å teste ut. Dette medfører et høyere forståelsesnivå enn Kai, som også gjør en vurdering. Den kritiske vurderingen av hvorvidt verdiene er relevante mangler hos Kai, som vi vurderer til unistrukturelt forståelsesnivå. Selv om Kai kan ha kunnskap om flere andre strategier, viser han kun frem IGT som han heller ikke mestrer fullstendig. Dette stemmer godt overens med det unistrukturelle forståelsesnivået, ettersom han forstår hva problemet spør etter og har en plan for å løse det, men hverken kombinerer med andre strategier eller vurderer strategiens hensiktsmessighet (Biggs & Collis, 1982).

5.1.3 Mortens klinkekuler

Det tredje og siste problemet, «Mortens klinkekuler», handler om hvor mange klinkekuler Morten hadde før han begynte å spille i friminuttene. Dette problemet er det vi mener legger mest føringer for hvilke løsningsstrategier som er hensiktsmessige å bruke. I analysen

kommer det frem at det kun er fire strategier som brukes for å løse dette problemet. En av årsakene til at færre typer strategier brukes, er at dette problemet kan løses ved å reversere regneoperasjoner i riktig rekkefølge. Det gis informasjon om hvor mange klinkekuler Morten endte opp med etter en rekke hendelser, og problemet informerer derfor om hva konklusjonen er. Posamentier og Krulik (2015, s. 29) presiserer tydelig at det å arbeide baklengs (AB) handler om å reversere operasjoner for å komme tilbake til utgangspunktet. Når konklusjonen er gitt og målet er å finne veien tilbake til start, er det hensiktsmessig å arbeide baklengs (jf. Posamentier & Krulik, 2015, s. 29; Croy, 2000, s. 175).

Som regel velger de fleste elevene AB for å løse problemet. Flere gjør det på en ryddig og gunstig måte, og vi trekker frem Tuva sitt løsningsforslag som et godt eksempel på strategien (jf. figur 4.3.1.2). Når elevene bruker IGT vurderer de at løsningen må ligge nær 15, og avgrenser dermed hvilke verdier de tester ut. Vi trekker frem Kai sin forklaring på hvordan han har forsøkt å løse problemet (jf. figur 4.3.1.5). Han forsøker først å arbeide baklengs (AB), men han forstår ikke hvordan strategien kan brukes for å løse problemet. Det er da han i stedet velger IGT, og viser god forståelse for når og hvordan strategien er gunstig. Selv om Kai viser mindre kunnskap og forståelse for AB klarer han likevel å hente seg inn med en annen strategi, og det hele vitner om at han har forstått hva som skal til for å løse problemet. Det unistrukturelle forståelsesnivået karakteriseres ved at eleven har forstått hva problemet spør etter (Biggs & Collis, 1982). Eleven kan også ha kunnskap om flere strategityper, men de brukes adskilt. Det er med dette grunnlaget at Kai vurderes til unistrukturelt forståelsesnivå.

5.2 Strategienes bidrag

Et vesentlig aspekt ved problemstillingen i forskningen vår handler om hvordan problemløsningsstrategier bidrar til å komme frem til løsninger. I dette underkapittelet diskuterer vi hvordan elevene bruker hver enkelt strategi, i et forsøk på å danne et helhetlig bilde av strategienes rolle i elevenes problemløsning. To av strategiene brukes ikke i noen av problemløsningsoppgavene, mens to andre kun brukes én gang (jf. figur 4.4.1). Kunnskapen som dannes i diskusjon knyttet til disse fire strategiene er derfor vanskelig å tilføre nevneverdig overførbar verdi (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 65; Yin, 2018, s. 44-45). Likevel ser vi et vesentlig hopp til resten av strategiene, som samtlige er brukt minst fire

ganger av elevene i løpet av de tre problemløsningsoppgavene. Det er diskusjon knyttet til disse strategiene vi ønsker skal vies mest oppmerksomhet.

5.2.1 Logisk resonnement (LR)

Når elevene bruker LR gjør de det på én av to måter. Enten brukes strategien som en inngang ved å reflektere over premissene ved informasjonen i problemet, for å avgjøre hvordan det er hensiktsmessig å løse det. Eller så brukes den for å konkludere om løsningsforslaget er tilfredsstillende. Begge måter å bruke strategien på bidrar som regel til tilfredsstillende løsninger. Posamentier og Krulik (2015, s. 1) skriver at LR ofte brukes når man ønsker å forenkle fremgangsmåten i problemet. Vi argumenterer for at elevene som bruker strategien som en inngang for å vurdere hvordan man best kan angripe problemet, faktisk forenkler fremgangsmåten i problemet. Bronkhorst et al. (2020, s. 1676) presiserer at LR også handler om å trekke ut og koble sammen informasjon i problemet for å danne konklusjoner. Når elevene bruker strategien for å konkludere om de har løst problemet, trekker de ut og kobler sammen informasjonen, slik at de kan vurdere om løsningsforslaget er tilfredsstillende. Altså er det klare paralleller mellom hva elevene gjør når de bruker strategien og hva teorien sier.

5.2.2 Mønstergjenkjenning (MG)

«Å telle kvadrater» er det et eneste problemet hvor elevene bruker MG for å løse (jf. figur 4.4.1). Når elevene bruker strategien leter de etter noe som endrer seg i rekkene. Om de finner noe konsekvent som de mener skjer hver gang, bruker de den nye informasjonen videre i prosessen. Likevel utnytter elevene den på ulike måter. Noen bruker knapt den nye informasjonen, mens andre mestrer å omdanne den til algebraiske uttrykk som beskriver endringene i rekken. I følge Posamentier og Krulik (2015, s. 13) handler mønstergjenkjenning både om å finne mønster, men også å kunne beskrive regelmessighetene på en mer tilgjengelig måte. Der elevene ikke mestrer å gjøre den nye informasjonen mer tilgjengelig, er det vanskelig å argumentere for at de mestrer MG. Da vurderes også eleven til et lavere forståelsesnivå. Likevel argumenterer vi for at de som beskriver regelmessighetene ved hjelp av algebraiske uttrykk og utnytter den mer tilgjengelige informasjonen om mønsteret, har dyp forståelse for strategien og dens hensiktsmessighet. Elevene viser at de vet hvordan de skal utnytte strategiens styrker for å løse problemet. Det stemmer godt overens med Skemps beskrivelse av relasjonell forståelse, som handler om å vite når, hvordan og hvorfor prosedyrer kan brukes til å løse problemer (Skemp, 1978). Vi ønsker å presisere at

det er vanskelig å få utbytte av denne strategien uten å besitte vesentlige ferdigheter i å representere og beskrive endringer i antall. Hvis elevene ser at det skjer regelmessige endringer mellom figurene i rekken, men ikke klarer å sette ord på hva som skjer, er det vanskeligere å utnytte informasjonen om mønsteret til noe nevneverdig i problemløsningsprosessen. Elevene som bruker denne strategien har som regel et høyt forståelsesnivå (jf. figur 4.1.1.1). Det kan forklares ved at de produserer tilfredsstillende løsninger, og at de fleste kombinerer MG med andre strategier. Torkildsen (2017) presiserer nettopp at det å lete etter mønster ofte kombineres med andre strategier. Andre strategier kan også ha som mål å finne et mønster.

5.2.3 Arbeide baklengs (AB)

Å arbeide baklengs (AB) er en strategi elevene kun bruker i problemet «Mortens klinkekuler» (jf. figur 4.4.1). Problemet er situert rundt en veldig spesifikk og tydelig kontekst, der man får vite hva konklusjonen er. Om man vet konklusjonen og skal finne veien tilbake til startpunktet, er det som regel hensiktsmessig å arbeide baklengs (jf. Posamentier & Krulik, 2015, s. 29; Croy, 2000, s. 175). Når elevene bruker AB for å løse problemet starter alle ved den siste informasjonen som gis, og reverserer den nødvendige regneoperasjonen. Derfra blir veien vanskeligere for noen, men flesteparten mestrer å reversere samtlige operasjoner for å komme frem til en tilfredsstillende løsning. Et par av elevene er utydelige og uryddige i noteringene sine, som til slutt fører til at de mister oversikt over hva de har gjort og hva som skal gjøres. Disse besvarelsene vurderes til et lavere forståelsesnivå enn eksempelvis Tuva, som noterer på en ryddig måte (jf. figur 4.3.1.2). Den vesentlige forskjellene i elevenes besvarelser ligger nettopp i noteringen av operasjoner. Croy (2000, s. 174-175) beskriver AB som en prosess der man forsøker å finne veien tilbake til startpunktet fra konklusjonen. I prosessen arbeider elevene seg gjennom steg som leder tilbake til problemets premisser. Når elevene noterer feil, mister oversikt eller glemmer en operasjon, finner de heller ikke veien tilbake til startpunktet i problemet. Slik sett handler AB i stor grad om å gjennomføre tekniske prosedyrer med utpreget nøyaktighet. Elevene viser også gjennom besvarelsene at dersom de har kontroll på regneoperasjonene, så klarer de også å løse problemet. Vi trekker paralleller til instrumentell forståelse, som beskrives gjennom å kunne bruke prosedyrer uten nødvendigvis å forstå noe om hvorfor de fungerer (Skemp, 1978). En elev kan i prinsippet trene på å bruke AB hver gang man skal løse et problem der konklusjonen er gitt. Som beskrevet i analysen velger elevene som regel å bruke AB alene. Herfra ser vi det som

problematisk å vurdere elevenes forståelsesnivå. Et problem er som nevnt et dynamisk begrep, og avhenger av om problemløseren umiddelbart har tilgang på en metode eller prosedyre som svarer på spørsmålet (Mason & Davis, 1991, s. 3; Bjuland 2004, s. 219). En potensiell årsak til hvorfor vi opplever vanskeligheter med å vurdere forståelsesnivået til elevene ved bruk av AB, kan være nettopp at det ikke er et problem for elevene. Kanskje kjenner elevene igjen problemets struktur, og derfra ser det som en mulighet til å bruke en strategi de vet fungerer. Grunnlaget for å vurdere om elevenes forståelsesnivå fremstår dermed noe svakt. Uansett er det problematisk å vurdere om de mestrer å kombinere informasjon og utnytte flere strategier samtidig, når de kun bruker én strategi.

5.2.4 Innta et annet perspektiv (IAP)

Denne strategien brukes ikke av elevene i noen av problemløsningsoppgavene (jf. figur 4.4.1). Å innta et annet perspektiv (IAP) er en strategi som først og fremst viser sin styrke når man står fast i problemløsingen (Posamentier & Krulik, 2015, s. 45). Da kan man forsøke å dekomponere og rekombinere elementene i problemet på en mer tilgjengelig måte (Pólya, 2014, s. 76). Slik kan man se problemet fra et nytt perspektiv som kan hjelpe til å forstå problemet ytterligere. Om elevene opplever å stå fast og ikke vet hva de skal gjøre for å skape fremgang i problemløsningsprosessen, kan IAP altså være et nyttig verktøy. I flere av elevbesvarelsene finner vi løsningsforslag som består av TGT, ofte fordi de ikke forstår problemet eller hvordan det kan løses. I disse situasjonene kan elevene med fordel forsøke å finne en ny synsvinkel i stedet. IAP kan altså spille en stor rolle for elevene som ikke finner ut hvordan de skal løse problemet. Elevene besitter muligens ikke kunnskap om strategien. Læreren til elevene sier heller ikke noe nevneverdig om elevene har lært om eller brukt strategien i undervisningen. Lester (1996) argumenterer for at elever sliter med å løse problemer blant annet fordi de ikke får lære hvordan man kan anvende problemløsningsstrategier. Torkildsen (2017, s. 4) spesifiserer at det har vært lite fokus på arbeid med problemløsningsstrategier i norsk skole. IAP er en strategi vi ønsker skal vies mer oppmerksomhet i matematikkundervisningen og forskningen, nettopp fordi det foreligger et potensiale til å bruke den når man ikke forstår hvordan et problem kan løses.

5.2.5 Vurdere ekstreme tilfeller (VET)

VET er den andre strategien som ikke brukes av elevene (jf. figur 4.4.1). Å vurdere ekstreme tilfeller (VET) handler om å avgjøre hvilke valg som bør tas, på bakgrunn av hvordan de

mest ekstreme scenarioene ser ut (Posamentier & Krulik, 2015, s. 65). Strategien fungerer godt når man leter etter eksempelvis størst, minst, flest eller færrest mulige av noe. Ingen av problemene i forskningen vår spør spesifikt etter ekstreme tilfeller. Vi ser det som en faktor at elevene ikke eksplisitt inviteres til å bruke strategien for å løse problemene. Likevel argumenterer Larson (1983, s. 50) for at det kan være nødvendig å utforske hvordan ekstreme parametere påvirker problemet, uavhengig om det spesifikt spør etter ekstreme tilfeller. Igjen ser vi potensialet for at elevene ikke har arbeidet tilstrekkelig med strategien i skolen.

5.2.6 Løse et enklere problem (LEP)

Læreren til elevene forteller at de ofte bruker denne strategien i undervisningen. Likevel brukes LEP én gang i «Bestefars tiere» (jf. figur 4.4.1). Det er mulig utvalget av problemer i forskningen ikke legger spesielt godt til rette for bruk av strategien. Turid bruker LEP for å dele opp og forenkle problemet. Hun analyserer først egenskapene til 3 og 7, og avgjør at de er tiervenner. Her løser hun et underproblem og oppnår et delmål i tråd med slik Larson (1983, s. 37) beskriver. Informasjonen tar hun med seg videre i problemet, og løser deretter neste del. Strategien er effektiv når problemet fremstår kompleks eller forvirrende, med mye informasjon (Posamentier & Krulik, 2015, s. 83). Da er det til hjelp for elevene å kunne dele opp problemet i mindre biter. «Bestefars tiere» inneholder ikke nevneverdig mye informasjon, men ordlyden kan absolutt fremstå kompleks og forvirrende. Her foreligger muligens noe av forklaringen på at ikke flere elever velger LEP for å løse problemet - det inneholder ikke mye informasjon.

5.2.7 Organisere data (OD)

Læreren omtaler å organisere data (OD) som en strategi som elevene ofte vil bruke i kombinasjon med andre strategier. Han forteller at det er en strategi han har sett de har benyttet seg av ofte, ved at de sorterer for å få oversikt. OD blir benyttet i alle problemene minst én gang, og totalt blir den benyttet seks ganger (jf. figur. 4.4.1). Når elevene organiserer data (OD) lister de som regel opp informasjonen i problemet etter ulike kategorier. Noen bruker OD som en måte å hente ut og notere data fra problemets elementer. Informasjonen de sorterer er ikke en fullkommen løsning alene, men tas med videre i problemløsningen. OD brukes derfor aldri alene, og kombineres alltid med andre strategier. Å organisere er noe mennesker gjør helt naturlig (Posamentier & Krulik, 2015, s. 97; Skaalvik & Skaalvik, 2013, s. 57). OD handler om å sortere, ordne, kombinere og reorganisere informasjon i kategorier

eller grupper, slik at man kan få bedre oversikt i problemet. Vi argumenterer for at elevene som bruker OD lister opp informasjonen i problemene på hensiktsmessige måter. Et godt eksempel på en ryddig organisering av data, er Morten sin besvarelse på «Bestefars tiere» (jf. figur 4.2.1.3). Posamentier og Krulik (2015, s. 97) spesifiserer at det er viktig å organisere på en meningsfull måte. Altså er det vesentlig at elevene er klar over hvilke kriterier de sorterer etter. Når Thomas organiserer data i samme problem, fremkommer sorteringen svært tilfeldig. Måten han kategoriserer informasjonen på bidrar ikke til noe nyttig i problemløsingen. Det hjelper han heller ikke til noen tilfredsstillende løsning.

5.2.8 Lage en visuell representasjon (LVR)

LVR er strategien læreren sier han tror elevene kom til å benytte seg av oftest. Han forteller at elevene som regel har tegnet noe som hjelp til å løse ulike oppgaver eller problemer. Ut i fra elevbesvarelsene ser vi at elevene har brukt LVR fem ganger fordelt på problemene «Bestefars tiere» og «Å telle kvadrater» (jf. figur. 4.4.1). Vi ser en tydelig forskjell i bruken av LVR i de to problemene. Når elevene forsøker å tegne (LVR) i «Å telle kvadrater», oppdager de som regel at det tar for lang tid. Det viser seg at LVR ikke er hensiktsmessig for elevene å bruke i dette problemet. Når elevene bruker strategien for å løse «Bestefars tiere» er den til mer hjelp. Her bruker elevene OD og sorterer dataene slik at det fremstår som en visuell representasjon (LVR). Altså har ikke elevene nødvendigvis tegnet noe, men de lager visuelle representasjoner via en annen strategi. Larson (1983, s. 9) understreker at en visuell representasjon kan gjøre det enklere å assimilere informasjonen i problemet. Elevene bruker ferdigheter i sortering og notering til å danne billedlige skiller i informasjonen, som gjør det enklere for dem å forstå hvordan problemet kan løses. Posamentier og Krulik (2015, s. 115) presiserer at selv om ikke problemet eksplisitt spør etter visuelle representasjoner, så kan det være til hjelp å se det som skal vurderes. Elevene som kombinerer OD og LVR på denne måten vurderes til et høyt forståelsesnivå. De ser sammenhenger og anvender flere strategier samtidig på en hensiktsmessig måte, slik som beskrevet om relasjonelt forståelsesnivå (Biggs & Collis, 1982).

5.2.9 Redegjøre for alle muligheter (RAM)

Det er kun én elev som har forsøkt å redegjøre for alle muligheter (RAM) i problemet «Bestefars tiere» (jf. figur 4.4.1). Elise har laget en liste over multipler av 3, for å sjekke hvilke som kan adderes med 7 og få 65 som sum. Fordi hun ikke lager en liste med multipler

av 7, redegjør hun egentlig ikke for alle muligheter. Vi registrerer likevel at hun har gjort et forsøk på å vurdere en stor mengde med muligheter. Posamentier og Krulik (2015, s. 131) skriver at man som regel konstruerer en uttømmende liste som gjør det mulig å vurdere alle mulige løsninger. Elise har laget en liste som gjør det mulig å vurdere noen mulige løsninger, men ikke alle. RAM kan minne om OD fordi begge strategiene inkluderer en form for organisering (Posamentier & Krulik, 2015, s. 131). Det ser vi også igjen i Elises elevbesvarelse, ettersom hun organiserer multiplene på en hensiktsmessig måte.

5.2.10 Intelligent gjetting og testing (IGT)

IGT er en strategi som brukes ofte når elevene løser problemer (jf. figur 4.4.1). Når elevene gjetter og tester intelligent (IGT), gjennomfører de en vurdering av hvilke verdier som er verdt å teste ut. Noen vurderer at løsningen må ligge nær et spesifikt tall, mens andre avgrenser et område de vil teste ut. Uavhengig av hvordan elevene vurderer, kommer de fleste frem til tilfredsstillende løsninger. Posamentier og Krulik (2015, s. 145) omtaler strategien som en måte å spisse inn generalitetene når et problem er for komplisert. Det er vesentlig at elevene gjør en intelligent vurdering av hvilke verdier som er relevant å teste ut. Når elevene viser aktivt at de har valgt bort noen verdier ser vi at gjettingen er intelligent og ikke tilfeldig. Uten denne avgrensningen kan ikke elevenes forsøk på å løse problemet vurderes til IGT.

IGT fører til tilfredsstillende løsninger i alle problemene (jf. figur 4.4.2). Vi argumenterer for at IGT derfor kan beskrives som en allsidig strategi som vil kunne brukes for å løse mange forskjellige typer problemer. Guerrero (2010) presiserer at IGT kan brukes for å analysere kvantitative forhold, og at strategien kan hjelpe elever å utvikle sin kvantitative resonneringsevne. Samtlige av de matematiske problemene i vår forskning består av kvantitative forhold på en eller annen måte. Videre argumenterer Guerrero (2010) for at elever vil bli bedre rustet til å oversette det dagligdagse språket i et problem til et matematisk språk. Læreren til elevene sier IGT er en av to strategier man ofte benytter seg av i andre situasjoner i livet. Han mener derfor at det vil være naturlig for flere av elevene å benytte seg av disse også i arbeidet med problemløsning. Vi vil presisere at IGT derfor fremstår som en naturlig strategi å bruke for elevene i mange problemer, og det bør vies mye tid i skolen til å trene på hvordan man kan gjøre intelligente avgrensninger.

5.2.11 Tilfeldig gjetting og testing (TGT)

Som beskrevet i metodekapittelet består IGT og TGT av veldig like komponenter. Om elevene gjetter og tester uten å avgrense eller gjøre vurderinger av hvilke verdier som er relevante å teste ut, kan det heller ikke anses å være *intelligent* gjetting og testing (IGT). Da vurderes løsningsforslaget heller til *tilfeldig* gjetting og testing (TGT). Strategien brukes fem ganger i løpet av problemløsningsoppgavene (jf. figur 4.4.1). Likevel fører ikke TGT til tilfredsstillende løsninger noen av gangene (jf. figur 4.4.2). Derfor konkluderer vi med at strategien bidrar med svært lite eller ingenting i problemløsningsprosessen til elevene. TGT kan minne om «prøve-og-feile»-metoden, som ofte brukes om å prøve ut vilkårlige tilfeller for å se hva som fungerer (Posamentier & Krulik, 2015, s. 145). De som velger TGT har sjelden høyt forståelsesnivå. Elevenes bruk av strategien kjennetegnes ved at de prøver ut et vilkårlig tilfelle og feiler uten å vurdere om løsningen kan være korrekt. Derfor vil vi igjen presisere viktigheten av at elevene lærer og trener på å avgrense de verdiene som er relevante å teste ut.

5.3 Elevenes forståelse

Lester og Lambdin (2004, s. 192) argumenterer for at forståelse og problemløsning lever i symbiose. Altså er begrepene så tett tilknyttet hverandre at den ene fungerer ikke uten den andre. Det første steget i Pólyas (2014) beskrivelse problemløsningsprosessen handler om å forstå problemet. Om man ikke forstår det, vet man heller ikke hva som skal til for å løse det. Vi har vurdert elevenes forståelsesnivå ved hjelp av SOLO taksonomi (Biggs & Collis, 1982).

Elevene som har høyt forståelsesnivå, bruker jevnt over flere strategier samtidig og utnytter strategienes egenskaper på en effektiv måte. Likevel finnes det unntak; enkelte elever bruker kun én strategi, men mestrer den så godt at de vurderes til et høyere forståelsesnivå. Disse elevene gjør dessuten godt begrunnede vurderinger om at den strategien de velger er mest hensiktsmessig, selv uten bidrag fra andre strategier. Det som kjennetegner en elev på relasjonelt forståelsesnivå er at de forstår når og hvordan en strategi er hensiktsmessig for å løse et problem. De mestrer å utnytte spesifikke egenskaper ved enkeltstrategier, og kombinerer på en måte som lar dem løse problemene effektivt og med trygghet. Det relasjonelle forståelsesnivået handler om å kunne se sammenhenger og anvende flere strategier samtidig (Biggs & Collis, 1992). I tillegg kan elevene analysere egen problemløsningsprosess, og gjøre vurderinger om endringer som kan være gunstige. Når

elevene viser at de aktivt velger bort strategier og argumenterer for hvorfor en enkelt strategi er hensiktsmessig, gjør de samtidig en analyse av hvordan prosessen deres kan effektiviseres. Vi mener denne vurderingen er i tråd med relasjonelt forståelsesnivå, på tross av om elevene kun velger å bruke én strategi.

Flere av elevene bruker en kombinasjon av strategier for å løse problemer, uten at de vurderes til relasjonelt forståelsesnivå. Det som kjennetegner de som vurderes til multistrukturelt forståelsesnivå, er at de bruker flere strategier samtidig, men de brukes adskilt og det mangler en tydelig sammenheng mellom strategiene. Å befinne seg på multistrukturelt forståelsesnivå handler i stor grad om å mestre flere strategityper, uten å koble de sammen (Biggs & Collis, 1982). Billedlig sett er det kort vei opp til relasjonelt forståelsesnivå for disse elevene, og det som kreves er at de forstår hvordan strategiene kan kombineres på en effektiv måte. Selv om veien kan virke kort, kan det samtidig være vanskelig for elevene å ta steget opp et nivå.

Vi ser et tydeligere skille mellom unistrukturelt og prestrukturelt forståelsesnivå. Det som kjennetegner elevene på unistrukturelt nivå er at de som regel bruker én strategi som de får til, men de produserer ikke alltid tilfredsstillende løsninger. I blant bruker de flere enn én strategi, men enten anvendes de svært adskilt eller så bidrar de ikke til noe i prosessen. Når elevene vurderes til unistrukturelt nivå ser vi tydelig at de klarer å identifisere hva problemet spør etter, men de fleste mangler forståelse for hvordan de kan løse det. Dette er i tråd med slik unistrukturelt nivå er beskrevet (Biggs & Collis, 1982). Til sammenligning kjennetegnes elevene på prestrukturelt nivå ved at de ikke har forstått hva problemet spør etter, og har derfor svært lite grunnlag for å løse det. Slik Pólya (2014) beskriver problemløsning, er det umulig å løse et problem uten å forstå det. Disse elevene produserer ikke tilfredsstillende løsninger, og bruken av strategier er ofte svært enkel med preg av tilfeldighet. Å befinne seg på prestrukturelt nivå vitner om liten eller ingen grad av forståelse (Biggs & Collis, 1982).

Ingen elever vurderes til utvidet abstrakt forståelsesnivå. For å befinne seg på dette nivået krever det at elevene viser at de mestrer å utvide og ekspandere problemet ytterligere, for å utforske og teoretisere videre (Biggs & Collis, 1982). En årsak til at ingen av elevene befinner seg på utvidet abstrakt nivå, kan være at problemløsningsoppgavene ikke eksplisitt inviterer til videre utvidelser og teoretisering. Et par elever forsøker seg på å produsere formler for å beskrive mønsteret når de løser problemet «Å telle kvadrater», men

generaliseringen er unøyaktig og bærer preg av usikkerhet, og kan derfor ikke kategoriseres som utvidet abstrakt forståelsesnivå.

6.0 Konklusjon

I denne studien har vi hatt som hensikt å studere hvordan et utvalg tiendeklassinger arbeider med problemløsningsoppgaver. Mer spesifikt ville vi se på hvilke strategier de benytter seg av, og hvordan disse bidrar til løsninger av problemene. For at vi skulle kunne si noe om dette, gjennomførte vi en casestudie, der vi analyserte elevenes besvarelser. I forskningen bruker vi de ti strategitypene til Posamentier og Krulik (2015) som teoretisk rammeverk. Rammeverket danner dessuten utgangspunktet for kategoriene som brukes for avgjøre hvilke strategier elevene bruker. Elevbesvarelsene, intervjuet med læreren og observasjonen vi gjorde underveis trianguleres for å skape et helhetlig bilde av elevenes problemløsning og valg problemløsningsstrategier. Vi vil nå forsøke å konkludere på bakgrunn av analyse og diskusjon sett i lys av problemstillingens to deler.

6.1 Hvilke løsningsstrategier bruker tiendeklassinger i problemløsning?

Elevene bruker et bredt spekter av problemløsningsstrategier i møte med ulike problemløsningsoppgaver. Likevel viser resultatene at ikke alle strategitypene blir brukt. Vi konkluderer med at strategiene innta et annet perspektiv (IAP) og vurdere ekstreme tilfeller (VET) med fordel kan vies mer oppmerksomhet i undervisning om problemløsningsstrategier. Samtidig ser vi implikasjoner ved valg av problemer. Ordlyd og tematikk spiller definitivt en rolle for hvilke strategier som velges. Enkelte problemer løses mest effektivt og hensiktsmessig ved bruk av spesifikke strategier. Andre er mer åpne, og kan løses ved bruk av flere forskjellige strategier.

Strategiene som velges oftest for å løse de tre problemene er logisk resonnement (LR) og intelligent gjetting og testing (IGT). De brukes totalt åtte ganger hver seg, og er representert i alle problemløsningsoppgavene. Resultatene viser i tillegg at tilfeldig gjetting og testing (TGT) brukes fem ganger. Altså velger elevene oftest en eller annen form for gjetting og testing. Vi argumenterer for at det kan skyldes at elevene bruker gjetting og testing også i andre situasjoner i livet. Den samme argumentasjonen er relevant for å forklare hvorfor elevene ofte bruker LR for å løse problemer. Når elevene bruker strategiene utenfor skolematematikken, er det større sannsynlighet for at de også velger de samme strategiene når de skal løse matematiske problemer.

6.2 Hvordan bidrar strategiene til å komme frem til løsninger?

De fleste strategiene elevene bruker fører også til tilfredsstillende løsninger. Elevene velger ofte LR og IGT, og det kan som nevnt skyldes at de ofte bruker disse strategiene i andre situasjoner utenfor skolen. Strategiene fører også ofte til tilfredsstillende løsninger, muligens på grunn av de samme faktorene som nevnt. For at en strategi skal føre elevene videre i problemløsningsprosessen, trekker vi frem en forutsetning som spesielt viktig. Når elevene tilegner seg informasjon ved bruk av en strategi, er det vesentlig at de klarer å utnytte den. Det krever ofte et høyt forståelsesnivå. Utnyttelse av informasjonen gjøres som regel gjennom bruk av andre strategier, og kombinasjon av strategier er derfor noe som gagnar elevenes problemløsning i mange situasjoner.

Vi argumenterer for at forståelsesnivået til elevene har stor innvirkning på problemløsningen. I analysen fremkommer det tydelig at de som bruker TGT har lavt forståelsesnivå og aldri kommer frem til tilfredsstillende løsninger. Det skyldes som regel at elevene ikke forstår problemet, hvordan det kan løses eller at de ikke har mestret andre mer hensiktsmessige strategier.

7.0 Implikasjoner for videre forskning

Studien vi har gjennomført er en kvalitativ studie som forløp seg over to klokketimer i en enkelt ungdomsskoleklasse. Fordi vi kun har forsket på åtte elever, medfører det at vi ikke kan si noe om tendensen generelt blant ungdomsskoleelevene i landet. Ved å ta for seg flere klasser på flere forskjellige skoler, vil det øke generaliserbarheten til forskningen. Vår forskning preges av de åtte elevene som arbeidet med problemene. Hvis andre elever hadde vært en del av forskningen, ville resultatet kunne sett annerledes ut. En åpenbar mulighet for videre forskning på temaet, viser seg gjennom at man kan la elever arbeide med problemløsningsoppgaver over en lengre periode for å se endringer over tid. Her kan vi foreslå eksempelvis eksperimentelt enkelcasestudie som metode (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 70). I vår forskning har elevene arbeidet med tre problemløsningsoppgaver. Ved at man forsker over en lengre periode, vil elevene kunne arbeide med flere problemer, som kanskje vil kunne si noe mer om kunnskapen til elevene om de ulike strategiene. Dette vil kunne skape et enda tydeligere bilde på hvordan elevene arbeider med løsningsstrategier. Som drøftet i kapittel 3.4, vil man ikke kunne si at våre resultater er generaliserbare i stor grad.

Noe vi har tatt for oss i forskningen og som vi vurderte både før og underveis, var om elevene skulle få løse problemene i grupper. Vi har lest gjennom andre studier der forskningen er fokusert på elever i gruppearbeid. Kanskje kunne det vært interessant å forske på hvorvidt løsningsstrategiene man velger endrer seg om man arbeider i grupper, framfor alene. Et annet aspekt som vi vurderte ved forskningen vår, var hvorvidt elevene skulle få benytte seg av andre hjelpemidler enn penn og papir. Om strategiene man benytter seg av endrer seg når man for eksempel bruker digitale hjelpemidler, kunne vært et interessant bidrag til forskningen rundt temaet.

I vår forskning har vårt perspektiv vært på elevene og hvordan de løser problemer. Noe som også kunne vært relevant å forske på er hvordan lærerrollen påvirker elevenes ferdigheter i problemløsning. Hvordan benytter lærere seg av problemløsning i undervisningen, hvilken effekt har de metodene de benytter seg av? Hvilke metoder fungerer ikke? Underveis har vi gjort oss mange ulike tanker, der noen av de har blitt nevnt ovenfor. Problemløsning som metode har igjen blitt implementert i større grad i læreplanen, og videre forskning er noe som trengs for at fremtidens elever og lærere skal kunne nyte godt av metoden.

8.0 Referanser

- Adair, J. E. (2007). *Decision making & problem solving strategies* (2. utg.). Kogan Page Publishers.
- Bartlett, L. & Vavrus, F. (2017). *Rethinking case study: A comparative approach*. Routledge.
- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. Academic Press.
- Bjuland, R. (2004). Student Teachers' Reflections on Their Learning Process through Collaborative Problem Solving in Geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 199-225. <https://www.jstor.org/stable/4150308>
- Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet: Observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg.). Gyldendal Norsk Forlag.
- Breiteig, T. & Venheim, R. (2005). *Matematikk for lærere 2* (4. utg.). Universitetsforlaget.
- Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C. & Goedhart, M. (2020). Logical Reasoning in Formal and Everyday Reasoning Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(8), 1673-1694. <https://doi.org/10.1007/S10763-019-10039-8>
- Crespo, S. M. & Kyriakides, A. O. (2007). To Draw or Not to Draw: Exploring Children's Drawings for Solving Mathematics Problems. *Teaching Children Mathematics*, 14(2), 118–125. <https://doi.org/10.5951/TCM.14.2.0118>
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications
- Croy, M. J. (2000). Problem Solving, Working Backwards, and Graphic Proof Representation. *Teaching Philosophy*, 23(2), 169-187. <https://doi.org/10.5840/teachphil200023226>
- Dale, E. L., B. U. Engelsen & B. Karseth (2011). *Kunnskapsløftets intensjoner, forutsetninger og operasjonaliseringer: En analyse av en læreplanreform*. Universitetet i Oslo.
- Fauskanger, J. & Mosvold, R. (2015). En metodisk studie av innholdsanalyse - med analyser av matematikklæreres undervisningskunnskap som eksempel. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(2), 79-96.
- Intaros, P., Inprasitha, M. & Srisawadi, N. (2014). Students' problem solving strategies in problem solving-mathematics classroom. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 4119-4123.
- Karlsen, A. (2017). *Tiendeklassingers problemløsningsstrategier i matematikk* [Mastergradavhandling]. Universitetet i Agder.

- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Larson, L. C. (1983). *Problem-solving through problems*. Springer Science & Business Media.
- Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660-675.
- Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Matematik: Ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Nämnaren TEMA.
- Lester, F. K. & Lambdin, D. V. (2004) Teaching mathematics through problem solving. I B. Clarke et al. (Red.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s. 189-203). NCM.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Pearson Education Limited.
- Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Deakin University Press.
- Mulligan, J., English, L., Mitchelmore, M. Welsby, S. & Crevensten, N. (2011). An evaluation of the pattern and structure of a mathematics awareness program in the early school years. I J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Red.), *Mathematics: Traditions and [New] Practices - Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and 23rd Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers* (s. 548-556). AAMT & MERGA. <http://eprints.qut.edu.au/47315/>
- OECD (2005). *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*. OECD Publishing
- OECD (2015). *Education 2030 Project Proposal*. OECD Publishing.
- OECD (2018). *The future of education and skills: Education 2030*. OECD Publishing.
- Olafsen, A. R. & Maugesten, M. (2015). *Matematikdidaktikk i klasserommet*. Universitetsforlaget.
- Pólya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2015). *Problem-Solving Strategies in Mathematics: From common approaches to exemplary strategies*. World Scientific Publishing.
- Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode: For masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm

- Rott, B. (2012). Problem Solving in Mathematics Education: Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving. I T. Bergqvist (Red.), *The 13th ProMath conference, September 2–4, 2011, in Umeå, Sweden* (s. 95-109). Umeå Mathematics Education Research Centre.
- Rott, B., Specht, B. & Knipping, C. (2021). A descriptive phase model of problem-solving processes. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 737-752.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. I J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Red.), *Informal reasoning and education* (s. 311–343). Lawrence Erlbaum Associates.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334-370). Macmillan.
- Skaalvik, E. M. & Skaalvik, S. (2013). *Skolen som læringsarena: selvoppfatning, motivasjon og læring*. Universitetsforlaget.
- Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Sage Publications.
- Säljö, R. (2001). *Læring i praksis: Et sosiokulturelt perspektiv*. Cappelen Akademisk.
- Säljö, R. (2013). Støtte til læring – tradisjoner og perspektiver. I R. J. Krumsvik & R. Säljö (Red.), *Praktisk-pedagogisk utdanning: En antologi* (s. 53–80). Fagbokforlaget.
- Torkildsen, S. H. (2017). Matematisk problemløsning. Hentet fra <https://beta.matematikkssenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Torkildsen%20Matematisk%20Probleml%C3%B8sing.pdf>
- Utdanningsdirektoratet. (2020a) *Kjerneelementer (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer>
- Utdanningsdirektoratet. (2020b) *Fagets relevans og verdier (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/fagets-relevans-og-verdier?lang=nob>
- Utdanningsdirektoratet. (2020c). *Folkehelse og livsmestring*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

<https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/tv-errfaglige-temaer/folkehelse-og-livsmestring/>

- Valenta, A. (2016). Tallforståelse – anvendelse og engasjement. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning*, 27(4), 20-26.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L. & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. I P. S. Wilson (Red.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (s. 55-77). MacMillan.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6. utg.). Sage Publications.

9.0 Vedlegg

Her kommer en oversikt over vedlegg som hører til masteroppgaven.

9.1 Samtykkeskjema elev

«Elevs løsningsstrategier i arbeid med problemløsning»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å forske på hvordan elever arbeider i møte med problemløsningsoppgaver, og hvilke løsningsstrategier de velger. I dette skrevet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Vi, Andreas Vigdal Elvestad og Jørgen Nord, skal skrive en masteroppgave der vi forsker på elevs løsningsstrategier i problemløsning. Vi ønsker å gjennomføre en analyse av elevarbeider, der elevene først løser noen problemer med tilknytning til matematikk, før vi samler inn arbeidene. Altså ønsker vi å se etter hvilke løsningsstrategier elevene velger å bruke og hvorfor de velger nettopp disse strategiene. Elevarbeidene er anonyme besvarelser, og vil ikke kunne spores tilbake til eleven. Problemstillingen for oppgaven er foreløpig: «Hvordan tilrettelegge for ytterligere arbeid med problemløsningsstrategier for ungdomsskoleelever?» Med forbehold kan ordlyden i problemstillingen endres underveis i prosjektet.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Fakultet for lærerutdanninger språk/ Institutt for real-, praktisk-etiske-, samfunns- og religionsfag.

Ved studentene: Jørgen Nord og Andreas Elvestad

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får denne forespørselen etter dialog i mellom prosjektansvarlige og din matematikklærer, fordi du er knyttet til en av Høgskolen i Østfolds praksisskoler.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i dette prosjektet, vil du delta i undervisning der du skal arbeide med problemløsningsoppgaver med tilknytning til matematikk. De oppgavene du gjør vil bli samlet inn og analysert av oss. Oppgavene vil bli nummerert, og navn vil ikke være synlig. Altså behandles besvarelsene anonymt. Lenger ned kan du lese videre om hvordan dataene blir behandlet.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli slettet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun vi og vår veileder som vil ha tilgang til de innsamlede dataene. Forutenom at funnene blir presentert som anonyme data i oppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Dataene vil lagres anonymt og lokalt på en datamaskin og blir slettet når prosjektet er avsluttet.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,

- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Høgskolen i Østfold har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Vår kontaktinformasjon

- Høgskolen i Østfold ved Monica Nordbakke

monica.nordbakke@hiof.no, tlf. +47 696 08 322

- Vårt personvernombud: Line Mostad Samuelsen

line.m.samuelsen@hiof.no, tlf. +47 696 08 234

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS:

personverntjenester@nsd.no, tlf. +47 555 82 117.

- Masterstudent Andreas Vigdal Elvestad

andreave@hiof.no, tlf. +47 412 69 877

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlige

Masterstudenter Andreas Vigdal Elvestad og Jørgen Nord.

Veileder Monica Nordbakke

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Elevvers løsningsstrategier i arbeid med problemløsning*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til (sett kryss):

☐

å delta i prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

(Signert av prosjektdeltakers foresatte, dato)

9.2 Samtykkeskjema lærer

«Elevers løsningsstrategier i arbeid med problemløsning»?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å forske på hvordan elever arbeider i møte med problemløsningsoppgaver, og hvilke løsningsstrategier de velger. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

Vi, Andreas Vigdal Elvestad og Jørgen Nord, skal skrive en masteroppgave der vi forsker på elevers løsningsstrategier i problemløsning. Vi ønsker å gjennomføre en analyse av elevarbeider, der elevene først løser noen problemer med tilknytning til matematikk, før vi samler inn arbeidene. Altså ønsker vi å se etter hvilke løsningsstrategier elevene velger å bruke og hvorfor de velger nettopp disse strategiene. Elevarbeidene er anonyme besvarelser, og vil ikke kunne spores tilbake til eleven. Problemstillingen for oppgaven er foreløpig: «Hvordan tilrettelegge for ytterligere arbeid med problemløsningsstrategier for ungdomsskoleelever?» Med forbehold kan ordlyden i problemstillingen endres underveis i prosjektet.

Hvem er ansvarlige for forskningsprosjektet?

Fakultet for lærerutdanninger språk/ Institutt for real-, praktisk-etiske-, samfunns- og religionsfag.

Ved studentene: Jørgen Nord og Andreas Elvestad

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i dette prosjektet, vil du delta i intervju der du vil bli stilt spørsmål om elevenes forkunnskaper i problemløsning. I tillegg vil det omhandle dine tanker og forventninger knyttet til elevers løsningsstrategier i problemløsning. Du vil også gjennomføre et undervisningsopplegg med elevene som vi har laget.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykke tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle opplysninger om deg vil da bli slettet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Det er kun vi og vår veileder som vil ha tilgang til de innsamlede dataene. Forutenom at funnene blir presentert som anonyme data i oppgaven.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?

Dataene vil lagres anonymt og lokalt på en datamaskin og blir slettet ved prosjektets slutt.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av dine personopplysninger (dataportabilitet), og
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Høgskolen i Østfold har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

Vår kontaktinformasjon

- Høgskolen i Østfold ved Monica Nordbakke
monica.nordbakke@hiof.no, tlf. +47 696 08 322
- Vårt personvernombud: Line Mostad Samuelsen
line.m.samuelsen@hiof.no, tlf. +47 696 08 234
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS:
personverntjenester@nsd.no, tlf. +47 555 82 117.
- Masterstudent Andreas Vigdal Elvestad
andreave@hiof.no, tlf. +47 412 69 877

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlige

Masterstudenter Andreas Vigdal Elvestad og Jørgen Nord.

Veileder Monica Nordbakke

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Elevs løsningsstrategier i arbeid med problemløsning*», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til (sett kryss):

☐

å delta i prosjektet

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet.

(Signert av prosjektdeltaker, dato)

(Signert av prosjektdeltakers foresatte, dato)

9.3 Intervjuguide

Elevers løsningsstrategier i arbeid med problemløsning.

Semistrukturert intervju, med noen åpne spørsmål og muligheter for oppfølgingsspørsmål.

Elevenes forkunnskaper

- Kan du fortelle noe om hvorvidt elevene har jobbet med problemløsning tidligere?
- Har elevgruppen kunnskap om ulike løsningsstrategier? (Husk taushetsplikt)
- Hvordan anvender elevene løsningsstrategier?

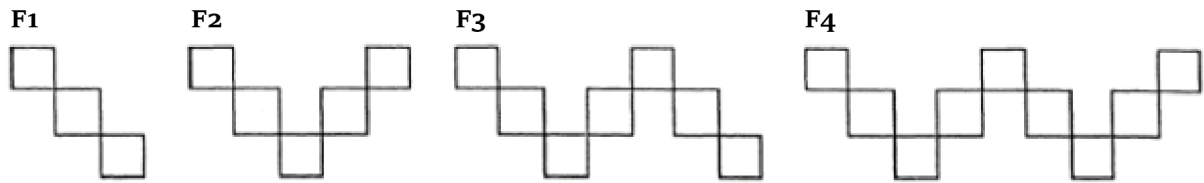
Lærers bruk av problemløsningsoppgaver

- Hvordan har du lagt tilrette for arbeid med problemløsning i matematikkundervisningen?
- Hvordan legger du tilrette for elevenes kunnskap om problemløsningsoppgaver i undervisningen?
- Hvordan legger du tilrette for elevenes anvendelse av problemløsningsstrategier i undervisningen?
- Vet elevene hvorfor?

Lærers tanker og forventninger om elevenes strategier

- Hvilke løsningsstrategier ser du igjen i elevenes arbeider?
- Hvilke løsningsstrategier tror du elevene benytter seg av i problemløsning?
- Hvorfor tror du akkurat disse strategiene vil fremkomme?

9.4 Oppgaveark



Å telle kvadrater

Hvor mange kvadrater trenger du for å lage figur 14 i rekken?

Hvor mange hjørner vil figur 14 ha? (Her finnes det flere måter å bestemme hva et *hjørne* er. Du kan velge, men forsøk å beskrive kort hva du mener er et hjørne i denne oppgaven)

Svarside (Å telle kvadrater)

Spørsmål til refleksjon (Å telle kvadrater)

1. Skriv med egne ord hvordan du forsøkte å løse problemet. Prøvde du flere enn én fremgangsmåte, i så fall hvilke?
2. Opplevde du å stå fast? Når? Hva gjorde du da?
3. Er det noe du skulle ønske du visste eller kunne mer om før du prøvde å løse problemet?



Bestefars tiere!

Bestefar har spart slik at han har 65 tiere. Han vil gi pengene til barnebarna sine:

- De små skal få 3 tiere hver
- De store skal få 7 tiere hver

Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha, var det ingen tiere igjen.

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha?

Svarside (Bestefars tiere)

Spørsmål til refleksjon (Bestefars tiere)

1. Skriv med egne ord hvordan du forsøkte å løse problemet. Prøvde du flere enn én fremgangsmåte, i så fall hvilke?
2. Opplevde du å stå fast? Når? Hva gjorde du da?
3. Er det noe du skulle ønske du visste eller kunne mer om før du prøvde å løse problemet?



Mortens klinkekuler

Morten og vennene spilte med klinkekuler i friminuttene:

- I første friminutt vant Morten så mye at han doblet antall klinkekuler.
- I andre friminutt gikk det ikke så bra. Da tapte han 7 klinkekuler.
- I tredje friminutt var han heldig og vant 3 klinkekuler.
- I fjerde friminutt var han skikkelig uheldig og tapte halvdelen av kulene.
- Da hadde han 13 klinkekuler igjen i boksen.

Hvor mange klinkekuler hadde Morten før de begynte å spille?

Svarside (Mortens klinkekuler)

Spørsmål til refleksjon (Mortens klinkekuler)

1. Skriv med egne ord hvordan du forsøkte å løse problemet. Prøvde du flere enn én fremgangsmåte, i så fall hvilke?
2. Opplevde du å stå fast? Når? Hva gjorde du da?
3. Er det noe du skulle ønske du visste eller kunne mer om før du prøvde å løse problemet?