

MASTEROPPGAVE

«Så Volumet kan jo bli uendelig stort».

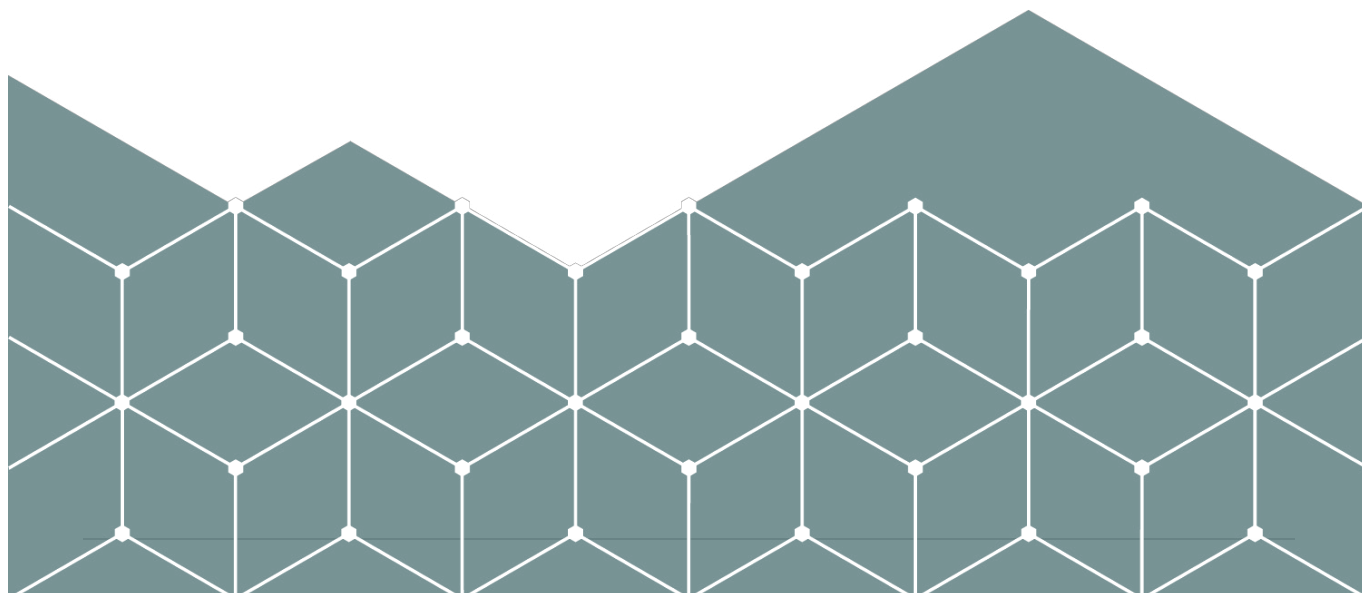
**Elevers matematiske kompetanse gjennom utforskning og taktile
læringsaktiviteter**

Vetle Wilhelm Due Vikanes og Peder Ramberg

15.05.2023

Grunnskolelærerutdanning (5-10)

Fakultet for lærerutdanning og språk



FORORD

Når vi nå står ved slutten av vår femårige lærerutdanning ved Høgskolen i Østfold, og med en ferdig masteroppgave i hånden, er vi klare for å ta fatt på rollen som lektorer i grunnskolen. Disse årene har vært preget av både opp og nedturer, og har gitt oss verdifulle erfaringer.

Vi ønsker å uttrykke vår dypeste takknemlighet til alle som har støttet oss på denne reisen: medstudenter, venner, kollegaer, familie, kjærester og veiledere. En spesiell takk rettes til veilederen vår Johan Bo Bredeberg. Dine gode råd, konstruktive kritikk og oppmuntrende tilbakemeldinger har vært uvurderlige i arbeidet med masteroppgaven. Vi vil takke for lånet av hytten på Vikabu, hvor mesteparten av denne oppgaven ble skrevet, og takke hverandre for et fruktbart samarbeid gjennom hele lærerutdanningen og i forbindelse med dette prosjektet.

Gjennomføringen av dette prosjektet ville ikke vært mulig uten velvilligheten fra lærere, elever og foresatte. Vi er takknemlige for den gjestfriheten og velvilligheten vi møtte, som bidro til å gjøre denne studien engasjerende, lærerik og interessant. Det er med stolthet og ydmykhet vi nå legger frem resultatet av vårt arbeid, og vi ser frem til å sette den nye lærdommen i praksis i vår fremtidige karriere som lektorer. Vi håper at vår masteroppgave kan være en inspirasjon og en ressurs for andre som ønsker å fordype seg i dette spennende feltet.

SAMMENDRAG

Denne masteroppgaven tar utgangspunkt i fagfornyelsen og er basert på to geometrioppgaver. En med møbiusbånd og en med sylindere, gjennomført med to grupper på tre elever fra 9. trinn. Datamaterialet ble dokumentert ved hjelp av observasjon, video- og lydopptak, og analysert gjennom et integrert rammeverk. Problemstillingen for studien er: "Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?"

For å besvare problemstillingen, har vi identifisert matematisk kompetanse i elevers arbeid med et utforskende geometriopplegg med bruk av taktile læringsaktiviteter. For å identifisere denne kompetansen, har vi utformet et integrert teoretisk rammeverk bestående av to allerede eksisterende rammeverk.

Oppgavens tema er inspirert av eget engasjement og motivasjon for praktisk og utforskende undervisning, samt et ønske om å bidra til forskning om effektive læringsmetoder og tilpasse undervisningspraksisen til fagfornyelsens formål. Studien har som mål å inspirere lærere og pedagoger til å se nye muligheter for undervisning og læring i matematikk gjennom utforskende undervisning og taktile aktiviteter.

ABSTRACT

In this master's thesis, the starting point is the the new curriculum. The geometry program consists of two tasks: one involving Möbius strips and one involving cylinders, conducted with two groups of three ninth-grade students. The data material was documented through observation, video and audio recordings, and analyzed using an integrated framework. The research question for the study is: "What mathematical competence can be identified through an inquiry-based geometry program with tactile learning activities?"

To answer the research question, we will identify mathematical competence in students' work with an inquiry-based geometry program using tactile learning activities. To identify this competence, we have designed an integrated theoretical framework consisting of two pre-existing frameworks.

The topic of the thesis is inspired by personal engagement and motivation for practical and inquiry-based teaching, as well as the desire to contribute to research on effective learning methods and adapt teaching practices to the requirements of the curricular renewal. The study aims to inspire teachers and educators to see new possibilities for teaching and learning in mathematics through inquiry-based learning and tactile learning activities.

INNHALDSFORTEGNELSE

FORORD.....	II
SAMMENDRAG	III
ABSTRACT	IV
1. INTRODUKSJON	1
1.2. <i>BAKRUNN FOR VALG AV TEMA</i>	1
1.2.1. Undervisning for fremtiden	2
1.3. <i>PROBLEMSTILLING</i>	3
1.4. <i>REDEGJØRELSE AV BEGREPER</i>	3
1.4.1. Matematisk kompetanse.....	3
1.4.2. Utforskende undervisning	4
1.4.3. Taktile læringsaktiviteter	4
1.5. <i>AVGRENSNINGER</i>	5
2. TEORI	6
2.1. <i>UTFORSKENDE UNDERVISNING</i>	6
2.1.1. Utforskningssyklusen	7
2.1.2. Tidligere forskning på utforskende undervisning	10
2.2. <i>TAKTILE LÆRINGSAKTIVITETER</i>	11
2.2.1. Tidligere forskning på taktile læringsaktiviteter	12
2.3. <i>MATEMATISK KOMPETANSE</i>	12
2.3.1. Fem tråder for matematisk kyndighet	13
2.3.2. Åtte delkompetanser for matematisk kompetanse.....	16
2.3.3. Sammenhengen mellom rammeverkene	19
2.3.4. Det integrerte rammeverket	21
3. METODE	22
3.1. <i>METODISK TILNÆRMING</i>	22
3.2. <i>OBSERVASJON, VIDEO- OG LYDOPPTAK</i>	23
3.3. <i>FORARBEID</i>	25
3.3.1. Utvalg og kontekst	25
3.3.2. Utvalg av oppgaver	26
3.4. <i>GJENNOMFØRING</i>	28
3.5. <i>ANALYSEVERKTØY</i>	30
3.5.1. Det integrerte rammeverket som analyseverktøy	31
3.6. <i>ETTERARBEID</i>	33
3.6.1. Analyseprosessen	33
3.6.2. Utvalg av situasjoner.....	34
3.6.3. Transkribering.....	35
3.6.4. Koding	36
3.7. <i>ETISKE OVERVEIELSER</i>	39
3.7.1. Samtykke	39
3.7.2. Forskning på barn	40
3.8. <i>RELIABILITET OG VALIDITET</i>	40
4. RESULTAT OG ANALYSE	42
4.1. <i>RESULTATER FRA KODINGEN AV</i>	42

<i>DATAMATERIALET</i>	42
4.1.1. Resultater presentert i prosent	43
4.1.2. Resultater presentert i antall koder	45
4.2. <i>MATEMATISK KOMPETANSE I ELEVENES SAMTALER OG HANDLINGER</i>	46
4.2.1. Gruppe 2 møbiusbåndoppgave	47
4.2.2. Gruppe 1 møbiusbåndoppgave	53
4.2.3. Gruppe 1 sylinderoppgave	56
4.2.4. Gruppe 2 sylinderoppgave	62
5. DISKUSJON	67
5.1. <i>STUDIENS UTFORSKENDE OG TAKTILE</i>	67
<i>NATUR</i>	67
5.1.1. Er geometriopplegget utforskende?	67
5.1.2. Bruker geometriopplegget taktile læringsaktiviteter?	70
5.1.3. Oppsummering	71
5.3. <i>HVILKE KOMPONENTER IDENTIFISERTE VI</i>	71
<i>GJENNOM ANALYSEN?</i>	71
5.3.1. Forskjellen mellom oppgaven	72
5.3.2. Likheten mellom gruppene	74
5.4. <i>IMPLIKASJONER AV STUDIEN</i>	75
6. AVSLUTNING	77
6.1. <i>AVSLUTTENDE REFLEKSJONER</i>	77
6.2. <i>VEIEN VIDERE</i>	78
LITTERATURLISTE	79
VEDLEGG	81
<i>Vedlegg 1- Möbiusbåndoppgave</i>	81
<i>Vedlegg 2 - Sylinderoppgave</i>	88
<i>Vedlegg 3 – Samtykkeskjema</i>	90
<i>Vedlegg 4 – Godkjent søknad fra NSD</i>	95

1. INTRODUKSJON

I denne masteroppgaven har vi gjennomført en kvalitativ undersøkelse, hvor vi har undersøkt hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med bruk av taktile læringsaktiviteter. Geometriopplegget består av to oppgaver, der den første handler om møbiusbånd og den andre om sylindere. Opplegget er gjennomført med to grupper bestående av tre elever på 9. trinn. Datamaterialet ble dokumentert ved hjelp av observasjon, video- og lydopptak, og analysert gjennom et integrert rammeverk. Dette ble gjort for å identifisere matematisk kompetanse i elevenes arbeid med oppgavene.

1.2. BAKGRUNN FOR VALG AV TEMA

Fagfornyelsen i matematikkundervisningen representerer en betydelig endring i hvordan matematikk skal undervises og læres i skolen (Utdanningsdirektoratet, 2021a). Formålet til fagfornyelsen er å forberede elevene på fremtiden, både i forhold til arbeidsliv, videre studier og som aktive borgere i et demokratisk samfunn. Dette innebærer blant annet å styrke dybdelæring og kritisk tenking. Dette krever en tilnærming som går utover tradisjonelle metoder og oppgaver. Hodge-Zickerman et al. (2020) påpeker at tradisjonell matematikkundervisning ofte legger vekt på memorering og gjentakelse av prosedyrer, noe som kan føre til at elevene mister interessen for faget. I denne masteroppgaven har vi valgt å utforske hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter. Geometri er et visuelt område innen matematikk, og taktile læringsaktiviteter gir mulighet for å bruke flere sanser ved utforskning av geometrien. Ved å integrere utforskende og taktile elementer i undervisningen, ønsker vi å skape en mer engasjerende og inkluderende læringsopplevelse for elevene, samtidig som vi styrker deres matematiske kompetanse i tråd med fagfornyelsens formål.

Vårt valg av tema er inspirert av egen skolegang, der vi husker praktisk og utforskende arbeid som engasjerende og motiverende. Vi har derfor et ønske om å identifisere hvilken matematisk kompetanse slike opplegg kan vise. På denne måten håper vi at denne studien kan inspirere til å se nye muligheter for undervisning og læring i matematikk.

Vårt valg av tema er motivert av et ønske om å bidra til den eksisterende forskningen om effektive læringsmetoder i matematikkundervisningen og tilpasse egen undervisningspraksis til fagfornyelsens formål. Gjennom å identifisere matematisk kompetanse i et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter, håper vi også å inspirere lærere og pedagoger til å se nye muligheter for undervisning og læring i matematikk. Problemstillingen er derfor relevant for dagens utdanningssituasjon.

1.2.1. Undervisning for fremtiden

Som fremtidige lærere stiller vi oss spørsmålet; hva ønsker vi at våre fremtidige elever skal sitte igjen med av kunnskap og ferdigheter? Kunnskapsdepartementet har bestemt at elevene skal sitte igjen med en gitt kunnskap etter endt skolegang. Disse kunnskapene kommer frem gjennom kjerneelementene i fagfornyelsen, og er derfor viktige for vår masteroppgave.

Formålet med kjerneelementene i matematikk er å beskrive de mest sentrale og grunnleggende ferdighetene, kunnskapene og forståelsene som elevene trenger for å utvikle matematisk kompetanse. Disse elementene er nøye utvalgt for å styrke elevenes evne til å forstå og anvende matematikk i hverdagen, videre studier og arbeidslivet. Elementene stimulerer til nysgjerrighet, engasjement og interesse for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020). Ettersom ett av målene er å forberede elevene på deres fremtidige liv, er det nødvendig med undervisning som kan bidra til å oppnå dette. I fremtiden vil elevene møte ukjente og praktiske problemer. Et eksempel på et hverdagslig problem, kan være å bygge en bokhylle i den nye leiligheten sin. Dette er et problem uten en klar fasit og krever derfor utforskningsevne. Konstruksjonen av bokhyllen krever en praktisk tilnærming. Vi har derfor valgt en utforskende og taktisk arbeidsmåte for å tilrettelegge for utviklingen av ferdigheter som elevene vil trenge senere i livet.

1.3. PROBLEMSTILLING

Med bakgrunn i redegjørelsen ovenfor, har vi valgt å utforme følgende problemstilling:

Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?

Målet med denne problemstillingen er å identifisere matematisk kompetanse hos elever ved å analysere deres samtaler og handlinger mens de jobber med to utforskende geometrioppgaver med taktile læringsaktiviteter. Den første oppgaven innebærer å utforske egenskapene til et møbiusbånd, mens den andre oppgaven fokuserer på beregning av volumet til sylindere. I studien deltok totalt ni elever fra 9. trinn, hvorav seks elever utførte selve forskningsprosjektet og tre utførte en pilotgjennomføring. Elevene arbeidet i grupper på tre.

1.4. REDEGJØRELSE AV BEGREPER

For å sikre at problemstillingen blir forstått slik det den er ment, vil vi gjøre rede for tre nøkkelbegreper. Disse er *matematisk kompetanse*, *utforskende undervisning* og *taktile læringsaktiviteter*.

1.4.1. Matematisk kompetanse

Oppgavens problemstilling refererer til matematisk kompetanse. For å klargjøre begrepet er det nødvendig å avklare ulike definisjoner og begreper som har blitt brukt i forskning. Kilpatrick et al. (2001) beskriver matematisk kyndighet, mens Niss og Jensen (2002) diskuterer matematisk kompetanse. For å forene disse to begrepene, har vi valgt å bruke uttrykket «matematisk kompetanse» som en samlebetegnelse. I overordnet del av læreplanverket (Utdanningsdirektoratet, 2021a) er kompetanse definert som evnen til å tilegne seg samt anvende kunnskap og ferdigheter til å løse utfordringer og oppgaver i ulike sammenhenger og situasjoner. Dette innebærer forståelse og evne til refleksjon og kritisk tenking.

Nortvedt og Pettersen (2016) har tidligere brukt begrepet «matematisk kompetanse» til å knytte sammen matematisk forståelse, kunnskap og ferdigheter. På samme måte har vi valgt å bruke begrepet «matematisk kompetanse» som en dekkende betegnelse for det som diskuteres av både Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) i rammeverkene deres (se kapittel 2.3.).

1.4.2. Utforskende undervisning

Siden oppgavens problemstilling også refererer til utforskende undervisning, mener vi det er viktig å avklare hvordan vi forstår begrepet. Utforskende undervisning i matematikk er en pedagogisk tilnærming som vektlegger aktiv deltakelse fra elever i læringsprosessen. Dette innebærer at elever oppfordres til å lete etter mønstre, finne sammenhenger og diskutere seg fram til en felles forståelse av matematiske konsepter og problemstillinger (Kunnskapsdepartementet, 2020). I utforskende undervisning legges det mer vekt på strategiene og framgangsmåtene som benyttes, enn på å finne den endelige løsningen.

Utforskende undervisning bygger på konstruktivistiske prinsipper der læring oppstår når elever aktivt konstruerer sin egen forståelse gjennom interaksjon og refleksjon (Vygotsky & Cole, 1978). I denne tilnærmingen blir undervisningssituasjonen designet for å stimulere elevers nysgjerrighet, kreativitet og kritiske tenkning. Dette kan bidra til en dypere forståelse og styrke deres matematiske kompetanse (Fosnot & Dolk, 2002, s. 3). Fosnot og Dolk (2002) understreker at «undervisning for forståelse innebærer å skape situasjoner der elevene blir oppfordret til å bygge, teste og raffinere sine egne ideer» (s. 3).

1.4.3. Taktile læringsaktiviteter

Studiens problemstilling refererer også til taktile læringsaktiviteter. Vi mener derfor at det er nødvendig å forklare begrepet. Vi kan først definere begrepet taktil på denne måten: *«har med berøring å gjøre; som oppleves gjennom eller som gjelder følesansen»* (NAOB). Videre kan begrepet taktil ses i sammenheng med en aktivitet. En taktil læringsaktivitet er en aktivitet hvor elevene lærer gjennom berøring og fysisk interaksjon. Med andre ord er en taktil læringsaktivitet en aktivitet som benytter berøring og modifiseringer av fysiske objekter.

1.5. AVGREN斯NINGER

I prosjektet har vi måttet foreta noen avgrensninger i forhold til studiens problemstilling. For det første vil vi påpeke at selv om utforsking og problemløsning er nært relaterte begreper, slik som for eksempel kjerneelementet «utforsking og problemløsning» viser, har vi på grunn av oppgavens omfang kun fokusert på utforsking i denne studien. For det andre har vi kun mulighet til å identifisere matematisk kompetanse i elevenes arbeid med opplegget, og kan ikke si noe om læringen eller den kognitive utviklingen til elevene.

Læring ifølge konstruktivismen forstås som en prosess der individet selv bygger sin egen kunnskap gjennom samspill med omgivelsene. Dette betyr at kunnskapen utvikles når elevene kobler nye opplevelser med allerede eksisterende kognitive strukturer (Ernest, 1998). Ut ifra dette forstår vi læring og utvikling av kunnskap som en kognitiv prosess som skjer inne i elevens sinn, og kan derfor være vanskelig å bekrefte gjennom dette prosjektet. Studien fokusere derfor på å identifisere kompetanse gjennom elevenes handlinger og diskusjoner, og dermed bidra til økt forståelse av hvilken kompetanse som kommer til uttrykk.

2. TEORI

I denne delen av oppgaven vil vi presentere teorien som danner grunnlaget for vår undersøkelse av problemstillingen; «hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?». For å kunne besvare dette spørsmålet, er det nødvendig å gå i dybden på begrepene utforskende undervisning i matematikk, taktile læringsaktiviteter og matematisk kompetanse. I det følgende, vil vi først gi en bred oversikt over utforskende undervisning. Deretter vil vi forklare ulike faser ved gjennomføring av et utforskende undervisningsopplegg. Etter dette, vil vi presentere et teoretisk grunnlag for taktile læringsaktiviteter. Til slutt vil vi fremheve og sammenligne to rammeverk for matematisk kompetanse, for så å sette dem sammen til et integrert rammeverk.

2.1. UTFORSKENDE UNDERVISNING

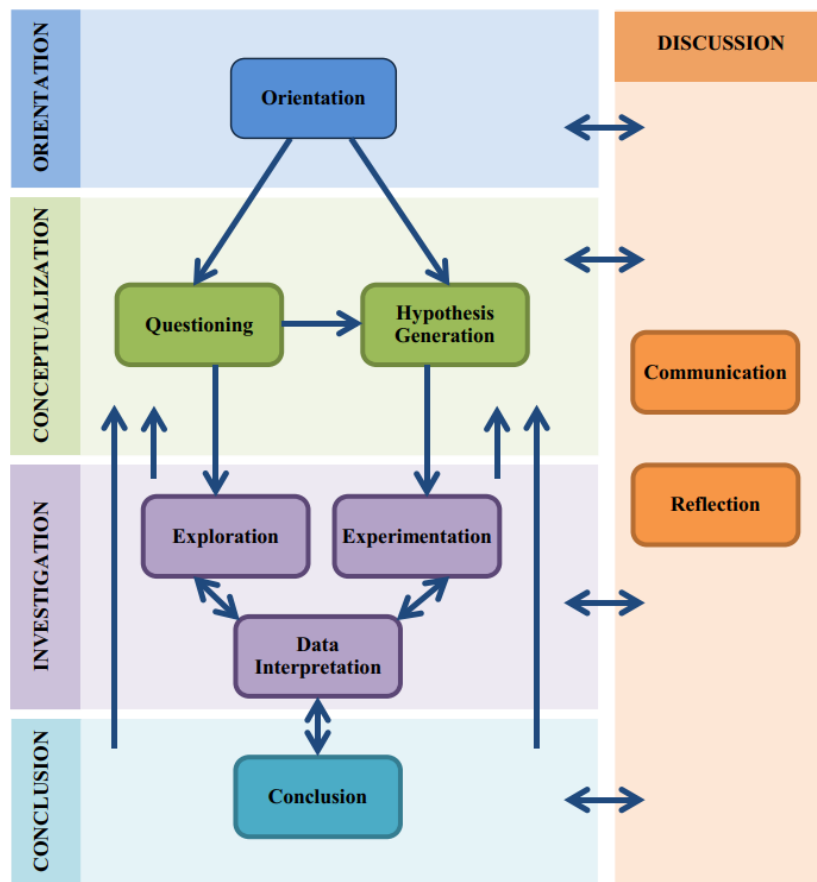
Utforskende undervisning, også kjent som inquiry-based learning, kan beskrives som en undervisningsform der elevene engasjerer seg i aktiviteter og prosesser som ligner måten matematikere og forskere arbeider på (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 797). Denne undervisningsformen innebærer at elevene oppdager nye sammenhenger ved å formulere hypoteser, som de deretter tester gjennom eksperimenter og/eller observasjoner (Pedaste et al., 2012, s. 82). Utforskende undervisning har blitt en stadig vanligere form for matematikkundervisning de siste årene (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 797). Dette viser en økende erkjennelse for viktigheten av aktiv læring og engasjement i matematikk.

Utforskende undervisning fokuserer på læring gjennom eksperimentering og konstruksjon, og oppmuntrer elevene til å utforske samt utfordre matematiske ideer (Schoenfeld & Kilpatrick, 2013, s. 908). Dette skiller seg fra mer tradisjonelle undervisningsmetoder, som ofte vektlegger memorering og reproduksjon av kunnskap (Hodge-Zickerman et al., 2020). Utforskende undervisning har ofte en tilknytning til problemløsning, da flere problemløsningsstrategier tas i bruk (Pedaste & Sarapuu, 2006, s. 48). Dette krever aktiv deltakelse fra elevene, og legger vekt på deres ansvar for å oppdage ny kunnskap (De Jong & Van Joolingen, 1998).

2.1.1. Utforskingssyklusen

Ettersom definisjonen av utforskende undervisning er bred og gir rom for variasjon i tilnærming og innhold, er det nødvendig å etablere en ramme som spesifiserer hva som menes med utforskende matematikkundervisning i denne studien. I dette delkapittelet presenteres en ramme for hvordan vi vil gjennomføre utforskende undervisningsopplegg.

Utforskende undervisning tar sikte på å introdusere elever til en autentisk vitenskapelig oppdagelsesprosess. For å veilede elevene gjennom denne prosessen og hjelpe dem med å fokusere på vitenskapelig tenkning, er det nødvendig å dele den komplekse vitenskapelige prosessen inn i mindre og logisk sammenhengende deler. Disse individuelle delene kalles utforskingens faser, og danner til sammen en utforskingssyklus (Pedaste et al., 2015, s. 48). Pedaste et al. (2015) har utviklet et rammeverk for utforskende undervisning basert på en systematisk analyse av forskningslitteraturen. Rammeverket beskriver fem overordnede faser som sammen med sine underordnede faser utgjør utforskingssyklusen. Dette rammeverket gir en strukturert tilnærming til utforskende undervisning, og kan hjelpe lærere samt elever med å navigere seg gjennom prosessen på en målrettet og effektiv måte. I de følgende avsnittene vil vi beskrive de fem fasene i utforskingssyklusen og deres underordnede faser, samt hvordan disse bidrar til en autentisk vitenskapelig oppdagelsesprosess. De fem fasene i utforskingssyklusen er ifølge Pedaste et al. (2015) *orientering*, *konseptualisering*, *undersøkelse*, *konklusjon* og *diskusjon*.



Figur 1: En illustrasjon av utforskningscyklusen til Pedaste (2015).

Orientering: I denne fasen blir elevene introdusert til et nytt tema. Fasen har som formål å vekke elevenes interesse og nysgjerrighet rundt et problem. Orienteringsfasen introduserer også viktige aspekter av problemet. Det formuleres også en problemstilling som betegner problemet (Pedaste et al., 2015, s. 54).

Konseptualisering: Denne fasen består av to underfaser, hypoteseformulering og stille spørsmål. Ved å stille spørsmål kommer elevene fram til et eller flere forskningsspørsmål om et tema. Under hypoteseformulering kommer de fram til en testbar hypotese. Generelt handler hypoteseformulering om formulering av en påstand eller et sett med påstander. Spørsmålsformulering handler derimot om en formulering av undersøkelsesspørsmål. Konseptualiseringsfasen resulterer i enten forskningsspørsmål eller hypoteser som skal undersøkes. Det kan imidlertid også resultere i begge deler. Dette vil være tilfellet dersom det først formuleres forskningsspørsmål som deretter brukes som grunnlag for å lage hypoteser (Pedaste et al., 2015, s. 54).

Undersøkelse: Undersøkelse er fasen der nysgjerrighet blir omsatt til handling for å svare på de angitte forskningsspørsmålene eller hypotesene. Undersøkelsesfasen består av tre delfaser. Disse delfasene er *utforskning*, *eksperimentering* og *datafortolkning*. Under utforskningen, gjør elevene en undersøkelse for å finne sammenheng mellom variablene uten å ta hensyn til en hypotese. Neste fase er eksperimentering, hvor elevene lager og bruker en strategisk plan for å undersøke hypotesen. Her handler det om å samle bevis for å teste en hypotese. Den siste delfasen av *undersøkelsesfasen* handler om å tolke dataene. Dette betyr at elevene formulerer forholdet mellom variabler. Elevene tillates da å trekke en konklusjon på det opprinnelige forskningsspørsmålet eller hypotesen (Pedaste et al., 2015, s. 55). Kort fortalt handler utforskning og eksperimentering om å samle inn data, mens datafortolkning fokuserer på å forstå denne dataen.

Konklusjon: Dette er fasen hvor elevene trekker og presenterer konklusjoner. Dette innebærer at elevene tar for seg forskningsspørsmålene og/eller hypotesene samt vurderer hvorvidt de er besvart. Deretter kan de trekke en konklusjon basert på resultatene de fant i studien (Pedaste et al., 2015, s. 55).

Diskusjon: Dette kan ses som en fase som utføres parallelt med de andre fasene. *Diskusjonsfasen* består av to delfaser, herunder *kommunikasjon* og *refleksjon*. Kommunikasjon handler om at elevene presenterer og formidler funn og konklusjoner, samt mottar tilbakemeldinger, kommentarer og følger andres argumenter. Refleksjon er en prosess hvor elevene engasjerer seg i tankevirksomhet. Refleksjonen er ikke begrenset til bestemte områder, men omfatter alt som finner sted i elevenes sinn. Elevene kan for eksempel vurdere undersøkelsesprosessen samt søke å forbedre den. Refleksjon betraktes hovedsakelig som en intern prosess, hvor eleven stiller seg spørsmål som; Hva gjorde jeg? og Hvorfor ble det sånn? Dette kan føre til beskrivelser, begrunnelser, kritikk og diskusjon. Dermed er refleksjon ofte mer fokusert på den undersøkelsesbaserte læringsprosessen og kommunikasjon på resultater av denne prosessen (Pedaste et al., 2015, s. 55).

Ved å ta utgangspunkt i utforskingssyklusen når vi utformer det utforskende undervisningsopplegget, oppmuntrer vi elevene til å tenke kritisk og selvstendig, samtidig som de utvikler ferdigheter som er nødvendige for problemløsning og eksperimentering (Pedaste et al., 2015, s. 49). Videre fremmer den samarbeid og kommunikasjon mellom elever, ettersom de oppfordres til å dele ideer, funn og hypoteser med hverandre (Pedaste et al., 2015, s. 50).

Utforskingssyklusen er fleksibel og kan tilpasses ulike fagområder, undervisningsmetoder og læringsmål (Pedaste et al., 2015, s. 51). Lærere kan skreddersy læringsopplevelsen for å passe til elevenes unike behov og interesser, noe som kan øke engasjementet og motivasjonen.

Ved å tilpasse utforskingssyklusen til et undervisningsopplegg med møbiusbånd og sylindere, kan vi gi elevene en dypere forståelse av disse matematiske konseptene. Ved å følge de fem fasene og deres underordnede faser, navigeres elever og lærere gjennom den vitenskapelige prosessen på en målrettet og systematisk måte (Pedaste et al., 2015, s. 53). Dette styrker kritisk tenkning, problemløsning og samarbeid, og det legger grunnlaget for en dypere forståelse av matematiske konsepter.

Basert på denne teorien, karakteriserer vi utforskende matematikkundervisning som en prosess som engasjerer elever i en systematisk og målrettet utforsking av matematiske konsepter, samtidig som de utvikler ferdigheter som kritisk tenkning, problemløsning, samarbeid og kommunikasjon.

2.1.2. Tidligere forskning på utforskende undervisning

Utforskende undervisning er ikke et nytt fenomen innen undervisningspraksis. For å fremheve hvilke effekter undervisningsformen kan ha, mener vi det er viktig å presentere tidligere forskning på emnet. Det finnes flere kvantitative studier som setter sin lit til utforskende undervisning som en effektiv undervisningsform. Et eksempel er Alfieri et al. (2011) som utførte en meta-analyse som sammenliknet utforsking med andre former for undervisning, slik som vanlig tavleundervisning og utforsking uten instruksjon. De fant at utforskende undervisning førte til bedre læring. En annen meta-analyse av Furtak et al. (2012) sammenlikner studier ved å bruke en bred rekke begreper for å forklare utforskende undervisning. De rapporterte en bedre effekt ved utforskende undervisning over tradisjonell undervisning. Studiene viser at utforskende undervisning kan ses på som en velegnet undervisningsform dersom det gjøres på en hensiktsmessig måte. Dette styrker valget av å implementere det i vårt prosjekt.

2.2. TAKTILE LÆRINGSAKTIVITETER

Som grunnlag for å beskrive taktile læringsaktiviteter, vil vi benytte oss av teori fra Hodge-Zickerman et al. (2020). De beskriver konseptet taktile læringsaktiviteter, hvordan de utføres og fordelene ved å benytte dem. Hodge-Zickerman et al. (2020) presenterer også en tidligere studie som tar for seg taktile læringsaktiviteter (se kapittel 2.2.1.).

Hodge-Zickerman et al. (2020) hadde et ønske om å gjøre matematikkundervisningen mer engasjerende og samarbeidsorienterte, samt fremme kreativ tenking. Dette førte til at de utviklet taktile læringsaktiviteter som fremmer aktiv læring gjennom manipulering av fysiske objekter.

Hodge-Zickerman et al. (2020) hevder at det finnes solid dokumentasjon for viktigheten av kreativ tenkning i matematikk. Likevel betraktes matematikklasserom ofte som formelle, strukturerte miljøer, hvor elever tilegner seg matematisk kunnskap på en hovedsakelig algoritmisk måte. Dette gjør at elevene oppfatter matematikk som noe en pugger. Hodge-Zickerman et al. (2020) uttrykker at taktile læringsaktiviteter er en alternativ måte å lære elevene problemløsningsferdigheter. Dette gir igjen elevene mulighet til å engasjere seg i matematisk kreativitet. Videre uttrykker forfatterne et ønske om at ferdigheter innen problemløsning, kommunikasjon og samarbeid skal bidra til at elevene tilegner seg nødvendige mellommenneskelige ferdigheter slik at de kan håndtere fremtidige situasjoner, enten det er i klasserommet, hverdagen eller på arbeidsplassen (Hodge-Zickerman et al., 2020, s. 379).

En taktil læringsaktivitet innebærer at elevene kommuniserer, forklarer sin tenkning, tenker utenfor boksen, diskuterer og lærer konsepter på en slik måte at forståelsen av matematiske ideer utvikles uten å hindre læring av prosedyremessige ferdigheter (Hodge-Zickerman et al., 2020, s. 379). Taktile læringsaktiviteter er designet for å bli utført i samarbeid, med grupper på to til fire elever ved et bord. De taktile læringsaktivitetene sentrerer seg rundt fysiske objekter, ofte laget av papir. Læreren skal involveres lite, foruten å gi nyttige hint eller stille målrettede spørsmål til elevenes tankeprosess. Elevene skal kontrollerer seg selv under arbeidet med objektene, og de skal samarbeide med gruppen sin. Under arbeidet skal elevene videre engasjerer seg i konsepter, samt snakke høyt med hverandre om matematikk. Ettersom elevene må «tenke høyt» for å samarbeide med hverandre, gir samtale læreren innsikt i hva elevene

tenker. Dersom elevene står fast, kan læreren styre situasjonen ved å gi hint og tips. Læreren skal likevel ikke gi løsninger (Hodge-Zickerman et al., 2020, s. 379).

Taktile læringsaktiviteter er kreative i seg selv. Bakgrunnen for dette er ifølge Hodge-Zickerman et al. (2020) at aktivitetene gir få formelle instruksjoner. Dette resulterer videre i at elevene blir nødt til å tenke «utenfor boksen». Når en arbeider med taktile læringsaktiviteter, er derfor kommunikasjonen viktig. Under samarbeidet om å løse den taktile læringsaktiviteten, vil elevene bruke all sin kunnskap, enten den er matematisk eller ikke. For at elever skal lære matematikk, må de ha motivasjon til å tilnærme seg matematisk språk, notasjon og formalisme. Siden taktile læringsaktiviteter tillater å lære matematikk på andre måter enn å kun ved å bruke blyant og papir, kan de bidra til slik økt motivasjon (Hodge-Zickerman et al., 2020, s. 380).

2.2.1. Tidligere forskning på taktile læringsaktiviteter

Hodge-Zickerman et al. (2020) presenterer en studie der studenter deltok i matematikkurs med taktile læringsaktiviteter som undervisningsmetode. Studentene som deltok, ble fulgt en viss periode. Taktile læringsaktiviteter bidro til økt engasjement i klasserommet, og påvirket studentenes læring positivt. Resultatene viste at studentene som hadde hatt taktile læringsaktiviteter som undervisningsmetode presterte bedre i senere matematikkurs sammenlignet med andre studenter. Hodge-Zickerman et al. (2020) påpeker at selv om den direkte årsakssammenhengen av taktile læringsaktiviteter ikke kan fastslås, er det tydelig at studentene i disse kursene lærte det nødvendige matematiske innholdet. De ble også godt forberedt til å fortsette i andre kurs (s.388). Avslutningsvis oppfordrer Hodge-Zickerman et al. (2020) andre til å lage taktile læringsaktiviteter samt formidle videre forskning om tema (s.389).

2.3. MATEMATISK KOMPETANSE

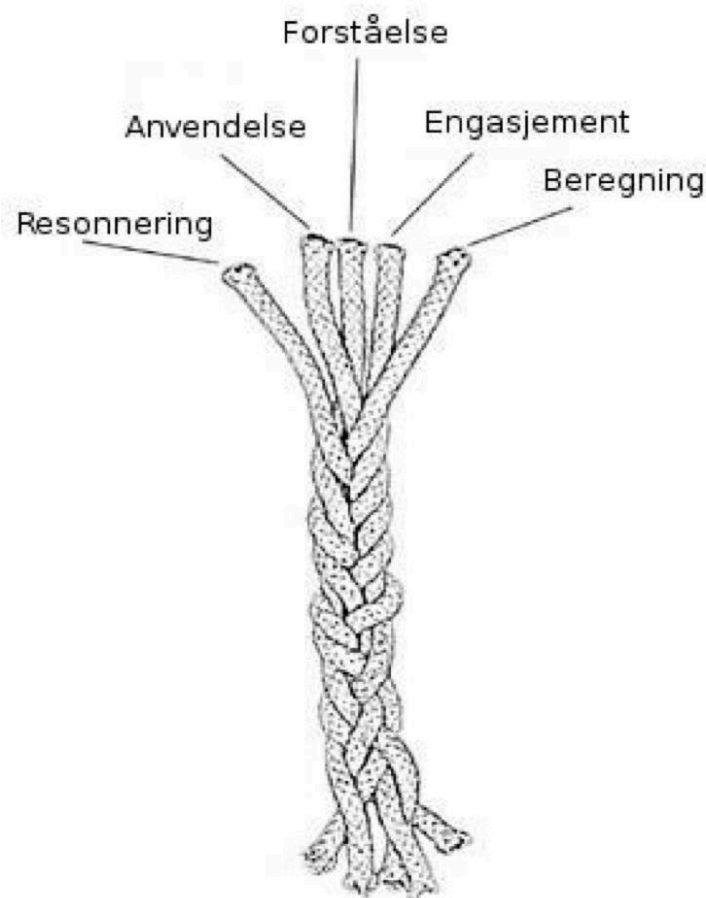
For å besvare problemstillingen, skal vi identifisere matematisk kompetanse gjennom elevers arbeid med et utforskende geometriopplegg med bruk av taktile læringsaktiviteter. For å identifisere denne kompetansen, har vi utformet et integrert teoretisk rammeverk bestående av

to ulike rammeverk. I det følgende vil vi gjøre nærmere rede for rammeverkene, før vi presenterer sammenhengen mellom dem og til slutt integrerer dem.

2.3.1. Fem tråder for matematisk kyndighet

Kilpatrick et al. (2001) skildrer det de anser som nødvendig for at barn skal lære matematikk, ved å benytte seg av begrepet matematisk kyndighet (Mathematical proficiency). Matematisk kyndighet beskrives gjennom fem sammensatte komponenter som blir fremstilt som et tau laget av sammenvevde tråder. Disse trådene er ikke isolerte, men er tett tilknyttet hverandre og representerer forskjellige sider av matematisk kyndighet (Kilpatrick et al., 2001, s. 116).

Matematisk kyndighet er beskrevet av Kilpatrick et al. (2001, s. 117), med komponentene: conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning og productive disposition. I det følgende, har vi valgt å benytte Matematikksenteret (2014, s. 11) sin oversettelse av trådene. Trådene vil dermed bli referert til som: forståelse (conceptual understanding), beregning (procedural fluency), anvendelse (strategic competence), resonnering (adaptive reasoning) og engasjement (productive disposition).



Figur 2: Illustrasjon av Kilpatrick sine fem tråder. Hentet fra Matematikksenteret (2014, s. 11)

Trådene er tett sammenvevd, og kan ikke anses som isolerte enheter. Kilpatrick et al. (2001) hevder at individer utvikler matematisk kyndighet ved at komponentene utvikles parallelt. Videre påpekes det at hensikten med matematisk kyndighet er å forberede elevene på matematiske utfordringer i dagliglivet, videre i utdanningen og arbeidskarrieren (s.116). Vi vil nå utdype hva Kilpatrick et al. (2001) legger i de ulike komponentene.

Resonnering har ifølge Kilpatrick et al. (2001) en bred betydning. Hovedsakelig kan en si at resonnering handler om å tenke logisk og systematisk for å se sammenhengen mellom matematiske situasjoner og problemer. Resonnering er ikke bare viktig for at elever skal forstå og anvende matematiske konsepter, det er også en viktig ferdighet som hjelper eleven med å

vurdere og rettfærdiggjøre tankene og løsningene sine. Gjennom denne komponenten blir elevene i stand til å reflektere over argumenter, analysere og vurdere bevis, samt forklare matematikken de anvender. Resonnement kan anses å binde matematikken sammen, og det fungerer som en veiviser for læringen Kilpatrick et al. (2001, s. 129).

En annen viktig komponent i Kilpatrick et al. (2001) sin teori, er *anvendelse*. Anvendelse refererer til hvordan elever bruker matematikk i ulike situasjoner og sammenhenger. Det handler om å bruke matematiske konsepter, ferdigheter og metoder for å løse problemer samt utføre oppgaver. Gjennom anvendelse vil elevene både lære å finne riktige metoder og strategier for å løse problemer, og tilpasse disse ved behov Kilpatrick et al. (2001, s. 124). Komponenter er spesielt knyttet opp mot komponentene forståelse og beregning. Dette kommer av at anvendelse blir mer fremtredende etter hvert som elevene utvikler ferdigheter innenfor beregning. Elevenes forståelse av matematiske prosedyrer og operasjoner utvikles parallelt med beregning. Dette kan bidra til ytterligere utvikling av anvendelseskompetanse, ettersom en over tid lærer å erstatte krevende og komplekse prosedyrer med mer presise og effektive metoder (Kilpatrick et al., 2001, s. 127).

Forståelse handler ifølge Kilpatrick et al. (2001, s. 118-119) om elevenes evne til å lære matematiske konsepter, prinsipper og sammenhenger. Dette betyr at elevene forstår hvordan matematikken er bygget opp, og hvordan ulike matematiske ideer henger sammen. Dette utdyper Kilpatrick et al. (2001) ved å si at forståelse innebærer å forstå det som ligger bak ideer og deretter kunne utvikle de videre. Dette gjør det mulig for elever å lære nye ideer ved å knytte dem til allerede eksisterende ideer og sette dem i sammenheng med hverandre. En konsekvens av dette er at det blir enklere for elevene å huske, anvende og eventuelt rekonstruere kunnskapen dersom den blir glemt. Dette kommer av at de har utviklet en forståelse for det som ble lært. Forståelse blir derfor viktig for å bevare kunnskapen til elevene. Et annet viktig poeng som Kilpatrick et al. (2001) nevner, er at elevene kan forstå noe før de klarer å uttrykke det skriftlig eller verbalt. I noen tilfeller vil det derfor være vanskelig å identifisere forståelse. Det er dermed viktig at en ser etter klare indikasjoner på forståelse, slik som at de klarer å fremstille matematiske situasjoner på forskjellige måter og vet når de skal bruke ulike representasjoner til ulike formål (Kilpatrick et al., 2001, s. 118-119).

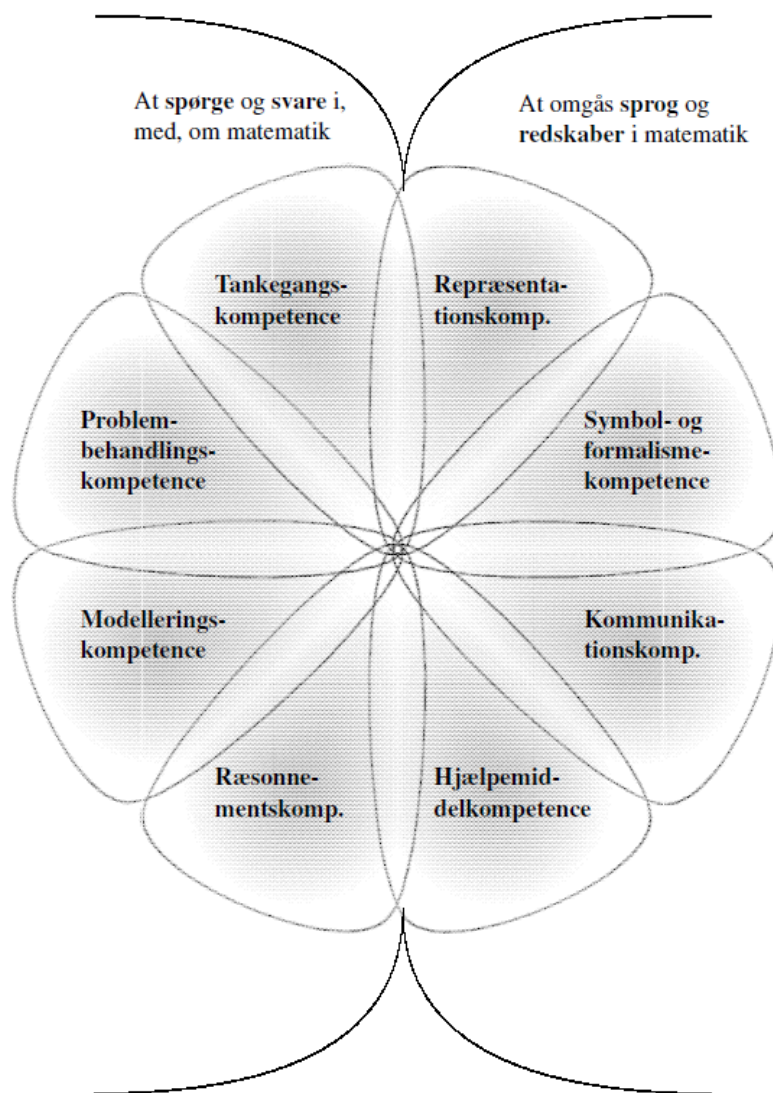
Beregning innebærer at elevene har kunnskap om matematiske prosedyrer og operasjoner. Med dette menes for det første at elevene vet når og hvor prosedyrene/operasjonene kan anvendes

hensiktsmessig. For det andre menes det at elevene har evner til å utføre prosedyrene/operasjonene på en fleksibel, nøyaktig og effektiv måte. På den måten er beregning tett tilknyttet anvendelse. Eksempler på beregning kan være når elevene bruker ulike metoder for å regne ut volumet av en sylinder. Siden elevene trenger forståelse for å identifisere likheter og forskjeller mellom beregningsmetoder, er beregning også tett knyttet opp mot forståelse. Å kunne benytte forskjellige beregningsmetoder innebærer blant annet å kunne bruke hoderegning for å finne ulike summer, differanser, produkter eller mengder. Beregning innebærer også å kunne anvende verktøy som kalkulator, datamaskin eller diverse konkrete (Kilpatrick et al., 2001, s. 121).

Engasjement handler om å anerkjenne matematikk som meningsfullt, nyttig og verdifullt samtidig som en har en positiv holdning til emnet og forstår viktigheten av å mestre det. Ved å utvikle de fire andre komponentene (forståelse, beregning, anvendelse og resonnering), kan elevene få troen på at de både kan lære og anvende matematikk og at de er i stand til å finne løsningene (Kilpatrick et al., 2001, s. 131). Med andre ord vil engasjement utvikles når de andre "trådene" eller komponentene forsterkes samt opprettholder et nært og sammenkoblet forhold til hverandre.

2.3.2. Åtte delkompetanser for matematisk kompetanse

I samarbeid med sin forsikringsgruppe, beskriver *Niss og Jensen (2002, s. 43)* matematisk kompetanse som evnen til å tilegne seg kunnskap om å forstå, utøve, anvende samt vurdere matematikk og matematisk aktiviteter i ulike kontekster. Matematisk kompetanse består av to hovedkategorier: *å kunne spørre og svare i og med matematikk*, og *å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper* (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Hver av disse to hovedkategoriene består av fire delkompetanser som til sammen utgjør åtte delkompetanser for matematisk kompetanse. Disse er vist i figuren nedenfor.



Figur 3: Illustrasjonsmodell av matematiske delkompetanser fra Niss & Jensen (2002).

Hovedkategorien; å kunne spørre og svare i og med matematikk, består av følgende delkompetanser; tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, modelleringskompetanse og resonnementskompetanse. I det følgende, vil vi først presentere disse.

Tankegangskompetanse bidrar til å hjelpe elevene med å spørre og svare i og med matematikk. Kompetansen innebærer å kunne stille og svare på spørsmål som er karakteristiske for matematikk. Kompetansen innebærer også å kjenne til samt forstå matematiske begreper og hvilke sammenhenger de kan brukes i. Tankegangskompetanse inkluderer også å kunne skille mellom ulike typer matematiske utsagn, slik som betingede utsagn, definisjoner, påstander og

antagelser basert på intuisjon eller erfaring. Etter hvert som begrepsforståelsen utvides, øker dette også mulighetene for abstraksjon og generalisering (Niss & Jensen, 2002, s. 47).

Problembehandlingskompetansen består delvis av å kunne sette opp, oppdage, formulere, og presisere ulike matematiske problemer. Et matematisk problem defineres som et problem som krever undersøkelse for å besvares. Kompetansen handler også om å kunne løse og formulere svar til slike matematiske problemer (Niss & Jensen, 2002, s. 49).

Modelleringskompetansen er evnen til å koble forhold utenfor matematikk med matematikk. Dette gjøres ved å analysere og konstruere matematiske modeller som klarlegger disse forbindelsene. Kompetansen innebærer å kunne tolke og evaluere eksisterende modeller, samt evnen til å lage matematiske modeller selv (Niss & Jensen, 2002, s. 52). Siden elevene i dette prosjektet ikke fokuserte på situasjoner utenfor matematikkens rammer, har ikke denne kompetansen blitt ytterligere prioritert eller fremhevet.

Resonnementkompetansen består på den ene siden av å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement. Med andre ord betyr det å følge enten skriftlige eller muntlige argumenter. Dette innebærer å forstå hva et matematisk bevis er, og hvordan det skiller seg fra andre matematiske resonnementer. Som eksempel bruker Niss & Højgaard Jensen resonnementer basert på intuisjon eller betraktning som må vurderes om utgjør et bevis eller ikke. På den andre siden består kompetansen av å kunne utforme og gjennomføre uformelle og formelle resonnementer (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Den andre hovedkategorien, «å kunne håndtere matematikkens språk og redskaper» (Niss & Jensen, 2002, s. 44)), består av følgende delkompetanser; *representasjonskompetanse*, *symbol- og formalismekompetanse*, *kommunikasjonskompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse*. Kompetansene innebærer å kunne bruke ulike notasjoner og representasjoner for å kunne kommunisere i og med matematikk, samt å kunne bruke ulike tekniske hjelpemidler (Niss & Jensen, 2002, s. 45-46). Disse vil bli presentert i det følgende.

Representasjonskompetansen innebærer evnen til å forstå og anvende ulike former for representasjoner av matematiske situasjoner (Niss & Jensen, 2002, s. 56). Dette skyldes at det er viktig å kunne omforme, tolke og skille mellom ulike matematiske objekter, fenomener, situasjoner eller problemer ved hjelp av ulike representasjoner. Denne kompetansen kan

potensielt komme til syne i forbindelse med problemløsningskompetanse hvor elvene må formulere, og presisere ulike matematiske problemer.

Symbol- og formalismekompetanse innebærer dels evnen til å tolke og forstå symboler og formler, dels å kunne konvertere mellom matematisk og naturlig språk. Den innebærer også å kunne arbeide med og anvende matematiske uttrykk. I tillegg innebærer denne kompetansen forståelse av egenskapene og reglene som gjelder for matematiske systemer. Symbol- og formalismekompetanse er knyttet til representasjonskompetanse, ettersom det handler om å kunne håndtere symboler og formler som brukes til å representere matematikk (Niss & Jensen, 2002, s. 58).

Kommunikasjonskompetansen har tette bånd til representasjonskompetansen og symbol- og formalismekompetansen. Dette fordi kompetansen innebærer å kunne forstå og tolke andres skriftlige, muntlige eller visuelle ytringer og tekster. I tillegg innebærer den å kunne formidle matematikk skriftlig, muntlig eller visuelt til forskjellige mottakere (Niss & Jensen, 2002, s. 60).

Hjelpemiddelkompetansen er den siste av de åtte delkompetansene som utgjør matematisk kompetanse. Kompetansen omhandler å kunne ta i bruk samt forholde seg til ulike tekniske hjelpemidler. Dette inkluderer å ha kjennskap til ulike verktøy som er relevante til matematisk bruk, og å forstå deres egenskaper, muligheter og begrensninger i ulike situasjoner. Videre er det viktig å være i stand til å bruke disse hjelpemidlene på en hensiktsmessig måte. Dette betyr å kunne vurdere hvilke hjelpemidler som er best egnet for en gitt oppgave, og å kunne tilpasse bruken av hjelpemidlene til den spesifikke situasjonen (Niss & Jensen, 2002, s. 62). Siden arbeidsformen i dette prosjektet er taktil, er hjelpemiddelkompetansen essensiell for denne studien.

2.3.3. Sammenhengen mellom rammeverkene

Som nevnt ovenfor, illustrerer Kilpatrick et al. (2001) matematisk kyndighet som et tau bestående av fem sammenflettede tråder. Hver av trådene representerer en av de fem komponentene som utgjør matematisk kyndighet. Trådene er flettet sammen for å vise hvordan

matematisk kompetanse kan ses på som en integrert helhet, hvor komponentene er nært knyttet sammen gjennom gjensidige relasjoner. Niss og Jensen (2002) har derimot delt matematisk kompetanse inn i åtte delkompetanser, som er gruppert i to kategorier. Deres kategorier og delkompetanser fokuserer på om elever kan spørre og svare i matematikk, og om de kan håndtere språket og redskapene som brukes i matematikken (Niss & Jensen, 2002, s. 44). Begge rammeverkene har likheter og forskjeller, men hovedmålet for begge er å beskrive sammenhengen samt gjensidige forhold mellom ulike deler av matematisk kompetanse.

Både Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) presenterer helhetlige syn på hvordan elever tilegner seg og utøver matematisk kunnskap, forståelse og ferdigheter. Likevel er det verdt å fremheve noen forskjeller mellom rammeverkene. For å beskrive den helhetlige matematiske kyndigheten til en elev, bruker Kilpatrick et al. (2001) begreper som *forståelse*, *raisonnement*, *engasjement*, *anvendelse* og *beregning*. Niss og Jensen (2002) henviser, på sin side, til ulike matematiske kompetanser som deler av en helhetlig matematisk kompetanse. Til tross for forskjellene, er det mange likheter mellom rammeverkene. Dette skaper en overlapping i den komplekse helheten de beskriver. Med dette mener vi at mange av delkompetansenes beskrivelser (Niss & Jensen, 2002), også gjelder for komponentene til Kilpatrick et al. (2001).

Det er likevel noen ulikheter knyttet til denne overlappingen. For eksempel, har Kilpatrick et al. (2001) *engasjement* som en komponent. Denne finner vi ikke i Niss og Jensen (2002) sitt rammeverk. Dette betyr ikke at det er umulig å utvikle engasjement parallelt med de andre delkompetansene de beskriver. Det betyr heller at Niss og Jensen (2002) ikke anser engasjement som nødvendig for å utvikle matematisk kompetanse i sitt rammeverk. En annen forskjell er at Niss og Jensen (2002) inkluderer modelleringskompetanse som en del av den helhetlige matematiske kompetansen. Dette er ikke eksplisitt en del av Kilpatrick et al. (2001) sin beskrivelse av matematisk kyndighet.

Det er mange likheter mellom rammeverkene til Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002). Dette gjør det mulig å trekke paralleller mellom dem. Begge rammeverkene fremhever at det finnes ulike komponenter eller delkompetanser som er tett knyttet sammen gjennom gjensidige forhold. Basert på dette kan vi hevde at begge rammeverkene representerer to ulike tilnærminger for å beskrive en helhetlig matematisk kompetanse. De dekker store deler av samme området, men på forskjellige måter. Denne styrken benytter vi oss av i vår studie.

2.3.4. Det integrerte rammeverket

For å skape et nytt rammeverk som kan bidra til å identifisere matematisk kompetanse i elevenes arbeid med oppgavene, har vi som nevnt ovenfor valgt å kombinere rammeverkene til (Kilpatrick et al., 2001) og (Niss & Jensen, 2002). Rammeverket vi har utformet tar utgangspunkt i Kilpatrick et al. (2001) sine fem komponenter for å beskrive den helhetlige matematiske kompetansen. Komponentene har vi oversatt til: forståelse, resonnement, engasjement, beregning og anvendelse. Disse komponentene utgjør hovedenhetene i rammeverket, men vil suppleres av Niss og Jensen (2002) sine beskrivelser av deres delkompetanser.

Valget av å integrere rammeverkene kommer av at Kilpatrick et al. (2001) presenterer et mindre og mer konsist sett med komponenter som sammen dekker helheten av matematisk kompetanse på en god måte. Niss og Jensen (2002) gir på sin side mer detaljerte og konkrete beskrivelser av matematisk kompetanse. Dette gjør at Niss og Jensen (2002) sitt rammeverk egner seg godt til å utdype forståelsen av komponentene som Kilpatrick et al. (2001) beskriver. På den måten utfyller de to rammeverkene hverandre godt, og de kan kombineres for å danne et nytt integrert rammeverk.

3. METODE

I dette kapittelet vil vi redegjøre for valget av forskningsmetode. Vi har gjort flere bevisste valg som har fått betydning for studien, og vil starte med å ta for oss den metodiske tilnærmingen til oppgaven samt datainnsamlingsmetoden vi benyttet. Deretter vil vi beskrive forarbeidet vi har gjort opp mot gjennomføringen av prosjektet. Videre vil vi beskrive gjennomføringen av prosjektet, analyseverktøyet og etterarbeidet som følger av gjennomføringen. Avslutningsvis vil vi drøfte etiske hensyn og valg som er gjort med tanke på reliabilitet og validitet.

3.1. METODISK TILNÆRMING

Beslutningen om hvilket instrument (metode) en skal bruke, følger ofte etter en viktig tidligere beslutning om hvilken type (metodikk) forskning en skal gjennomføre (Cohen et al., 2007b, s. 83). Prosjektet vårt er plassert i det Ernest (2009), i sin artikkel, kaller for et tolkende paradigme. Hensikten med en studie som posisjoneres i dette paradigme, er å forstå og skape mening i menneskers verden (Ernest, 2009, s. 35). Vi kan derfor si at vi har en fenomenologisk tilnærming med en hermeneutisk vektlegging av forståelse og fortolkning. I denne sammenhengen handler fenomenologi om å forstå sosiale fenomener ut fra informantenes egne perspektiver og beskrivelser av verden (Larkin et al., 2021, s. 1). Fenomener som uttrykker mening eller har en betydning, kalles for meningsfulle fenomener. Eksempler på slike meningsfulle fenomener kan være tekster, språklige uttrykk eller menneskelige handlinger. Karakteristisk for meningsfulle fenomener er at de må fortolkes. Det er dette forsøket på fortolkning og forståelse av informantenes meningsfulle fenomener som plasserer metoden vår innenfor hermeneutikken (Gilje & Grimen, 1995, s. 142-143). En annen måte å beskrive dette på er at informantene prøver å skape mening i sin verden, mens vi som forskere prøver å skape mening ut fra informantenes meningsskapende prosess. Dette støtter metodens plassering innenfor hermeneutikken (Larkin et al., 2021, s. 1).

Målet med denne studien er å søke forståelse og mening gjennom å analysere elevenes dialoger og handlinger mens de arbeider med et utforskende geometriopplegg som benytter taktile læringsaktiviteter. Vi prøver dermed å tolke og forstå hvilken matematisk kompetanse elevene viser gjennom deres diskusjoner og handlinger i arbeidet med oppgavene. På bakgrunn av dette

valgte vi en kvalitativ metode. Et kvalitativt forskningsdesign er ofte preget av en nærhet til feltet som studeres, og inkluderer feltarbeid (Krumsvik, 2014).

3.2. OBSERVASJON, VIDEO- OG LYDOPPTAK

På grunn av problemstillingen og geometrioppleggets utforming, er det viktig for oss å samle data både fra hva elevene sier og gjør. Derfor anser vi observasjon som en passende metode for denne studien. Observasjon skiller seg ut som en forskningsmetode ved at den gir forskere muligheten til å samle data direkte fra naturlige sosiale situasjoner. Dette gir oss muligheten til å samle data fra det som faktisk skjer. Det er kjent at mennesker kan handle annerledes enn hva de hevder å gjøre. Observasjon hjelper oss med å undersøke virkeligheten, og det lar oss se nyansene i atferd som ellers kan bli oversett, antatt eller gå ubemerket hen (Cohen et al., 2007a, s. 396). Fokuset for datainnsamlingen har vært å observere hvordan elevene argumenterer og løser oppgavene de arbeider med. Under datainnsamlingen var vi passive observatører. Dette innebærer at vi for det meste stod på «sidelinjen» og observerte situasjonene. Når elevene stod fast ga vi ikke elevene løsninger, men hint og tips. Dette er i tråd med Hodge-Zickerman et al. (2020) sin beskrivelse av hvordan en lærer styrer taktile læringsaktiviteter.

Datamaterialet for studien er hentet fra interaksjonene som skjer mellom elevene. Dette omfatter formelle eller uformelle, planlagte eller spontane, verbale eller ikke-verbale interaksjoner (Cohen et al., 2007a, s. 397). Med andre ord kan observasjon dokumentere et bredt spekter av data. Interaksjonene mellom elevene er i all hovedsak kommunikasjon. Kommunikasjon kan sammenlignes med en isberg-metafor. Et isberg har mesteparten av sin ismasse under vann, og en kan kun se toppen av det. Toppene av isberget kan sammenlignes med det som uttrykkes gjennom kommunikasjon. Mye av betydningen finnes mellom linjene, altså «under overflaten» (Alrø & Kristiansen, 1997). Siden mesteparten av betydningen finnes mellom linjene, må vi analysere og tolke det som blir uttrykt for å oppnå en dypere innsikt i det som er kommunisert. Det er tidskrevende og vanskelig å tolke kommunikasjon. Derfor bestemte vi oss for å benytte lyd- og videoopptak. Dette gir oss bedre tid til å få innsikt i elevenes interaksjoner.

Lydopptaket ble brukt for å dokumentere alle verbale interaksjoner, mens videopptaket ble brukt for å dokumentere alle ikke-verbale interaksjoner. Ikke-verbale interaksjoner innebærer ansiktsuttrykk, gestikuleringer (kroppsspråk), samt elevenes taktile arbeid med oppgavene. C. R. P. Bjørndal (2017, s. 82) skriver at lyd- og videopptak gjerne oppfattes som det sterkeste beviset på hva som har skjedd og hvorfor det skjedde. Bruken av videoobservasjon gjør det mulig å dokumentere alle ikke-verbale interaksjoner. Videre gjør videoobservasjon det mulig å se på hvordan situasjonen utspiller seg i sitt naturlige element. Dette gjelder også for lydopptak. Lydopptaket gir forskeren mulighet til å gå tilbake å analysere hva som egentlig skjedde (Krumsvik, 2014). Det er også viktig å poengtere kameraets betydning. Det er utfordrende å fastslå hvordan kameraet kan ha påvirket elevene, men vi erkjenner at det kan ha ført til at de opptre annerledes enn de normalt ville gjort.

Det er særlig verdt å nevne to begrensinger ved bruk av lyd- og videopptak C. R. P. Bjørndal (2017, s. 82) betegner begrensingene som *operatørens begrensinger* og *teknologiske begrensinger*. Operatøren må ta hensyn til mikrofonplassering, kameraets plassering og bildeutsnittet. Dette har betydning for både mengden og kvaliteten av dokumentert data. De teknologiske begrensingene kan være lyd- og bildekvalitet samt bakgrunnsstøy. At flere personer snakker samtidig, kan også være problematisk. Da kan noen, eksempelvis elevene som sitter lengst unna mikrofonen, forsvinne i «lydgrøten».

Elevene ble informert både muntlig og skriftlig om prosjektet. De ble også opplyst om at det ville være kamera og mikrofoner til stede under datainnsamlingen. Datainnsamlingen fant sted i et klasserom hvor elevene ble plassert rundt et bord, men med mulighet for å bevege seg rundt i rommet. Kameraet ble derfor plassert foran bordet, hvor bildeutsnittet dekket halvparten av klasserommet. I rommets hjørne var det et «hjelpemiddelbord» (se kapittel 3.3.2.1) hvor elevene kunne velge å bruke tilgjengelige ressurser. Bordet var godt synlig i videopptaket. Kameraet hadde høy bildekvalitet for å unngå misforståelser i videopptakene. For å oppnå god lydqualität, ble det også plassert ut to mikrofoner. Den ene mikrofonen ble plassert på bordet, og den andre ble plassert på et stativ bak bordet hvor elevene satt. Det ble på den måten lettere å tyde elevenes samtaler. Alt teknisk utstyr ble testet på forhånd.

3.3. FORARBEID

Før vi kunne gjennomføre prosjektet var vi nødt til å foreta noen forberedelser. Dette innebar å velge ut informanter til studien, samt velge ut og utarbeide oppgaver som kunne hjelpe oss med å besvare problemstillingen til studien. Disse valgene vil bli redegjort for i det følgende.

3.3.1. Utvalg og kontekst

For å finne informanter til studien, tok vi kontakt med en matematikklærer som underviste to 9. trinn-klasser. Læreren ga oss tillatelse til å gjennomføre prosjektet i begge klassene. Ettersom vi skulle ha et lite utvalg informanter, valgte vi å gjøre et strategisk utvalg av elever (Bryman, 2016, s. 418). Vi ønsket at deltakerne skulle ta oppgavene seriøst, slik at vi kunne få et tilstrekkelig datamateriale. I utvalget ble det lagt vekt på at deltakerne var samarbeidsvillige, tok oppgavene på alvor og representerte et realistisk faglig nivå for klassene. Vi ba derfor læreren om å gi oss et forslag på hvilke elever som oppfylte disse kriteriene. Basert forslaget valgte vi totalt seks tilfeldige elever, tre fra hver klasse. Elevene fikk et samtykkeskjema med informasjon om prosjektet som måtte signeres av foresatte.

For å oppnå en dypere forståelse av elevenes refleksjoner, handlinger og diskusjoner, benyttet vi en kvalitativ metode. På grunn av tidsbegrensninger og omfanget av masteroppgaven, var det nødvendig med et mindre informantutvalg. Et strategisk utvalg gjorde det mulig for oss å fokusere på elever som kunne gi rikelig og nyansert informasjon som videre kunne brukes til å besvare problemstillingen. Vi valgte grupper med tre elever fordi det har vist seg å være en effektiv gruppestørrelse som både fremmer samarbeid og kommunikasjon, samt gir mulighet for individuelle bidrag (Lou et al., 2001, s. 469). Vi antok at grupper bestående av klassekamerater ville bidra til bedre diskusjoner, ettersom de allerede kjente hverandre. Den mindre gruppestørrelsen gjorde det også mulig for oss å samle inn rikelige og detaljerte data innenfor prosjektets tidsbegrensninger og omfang.

3.3.2. Utvalg av oppgaver

Som tema for oppgavene, valgte vi geometri. Det er et komplekst og fascinerende emne som enkelt kan demonstreres med fysiske objekter samtidig som det gir muligheter for utforskning. Geometri er også en del av læreplanen for 9. trinn, noe som gjorde det relevant for deltakerne i prosjektet. Hodge-Zickerman et al. (2020) forteller at taktile læringsaktiviteter sentrerer seg rundt fysiske objekter, ofte laget av papir. Samtidig sier Schoenfeld og Kilpatrick (2013, s. 908) at utforskende undervisning fokuserer på læring gjennom eksperimentering og konstruksjon. Vi valgte derfor å sentrere oppgavene i prosjektet rundt to fysiske geometriske objekter laget av papir som elevene skulle konstruere og eksperimentere med. Opplegget er designet ut fra en bevisst tanke om at det skal være utforskende ved bruk taktile læringsaktiviteter.

Ved utformingen av oppgavene, la vi prosjektets problemstilling til grunn. Den søker å finne svar på hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom opplegget. Det var derfor viktig å velge oppgaver som kunne få frem alle de fem komponentene av matematisk kompetanse i elevenes arbeid. Vi utarbeidet først en oppgave som omhandlet den geometriske figuren møbiusbånd, men etter å ha innsett at denne oppgaven i liten grad ga rom for at elevene kunne bruke beregninger, bestemte vi oss for å supplere opplegget med en oppgave til. Den andre oppgaven omhandlet sylindere, og gjorde at vi ble tryggere på at opplegget som en helhet ga mulighet for at elevene kunne vise alle komponentene av matematisk kompetanse.

Opplegget ble delt inn i to deler, begge med fokus på utforskning og taktile læringsaktiviteter. Den første delen omhandlet egenskapene til et møbiusbånd, og den andre delen omhandlet volumet til sylindere. Møbiusbåndet ble valgt fordi det er en interessant geometrisk figur med mange unike egenskaper. Den ga således mulighet for interessante diskusjoner hos elevene. Sylinder-oppgaven ble valgt da den dekker en annen del av kompetansespekteret til elevene. Sammen mener vi at disse oppgavene vil kunne gi et godt grunnlag for å identifisere matematisk kompetanse.

Del 1 av opplegget tok utgangspunkt i møbiusbåndet. Opplegget er nærmere beskrevet i vedlegg 1, men vi kommer her til å gi en kort oversikt over hvordan oppgavene i del 1 er

strukturert. I den første oppgaven ble elevene bedt om å konstruere et møbiusbånd ved hjelp av instruksjonene i oppgaven. De ble først introdusert for en sylinder for å forklare begrepene sidefalte og ytterkant. Deretter ble de bedt om å diskutere hvor mange ytterkanter og sideflater møbiusbåndet hadde. For å verifisere påstanden sin, måtte de videre tegne en strek langs midten av båndet til de møtte punktet hvor de startet. I den neste oppgaven skulle elevene formulere en hypotese om hva de trodde kom til å skje når de klipper båndet langs den tegnede streken. Hvilken figur trodde de oppsto? Hvor mange ytterkanter, sideflater og tvister trodde de denne nye figuren fikk? Deretter skulle de klippe båndet for å se om hypotesen stemte samt diskutere hvorfor resultatet ble som det ble. Til slutt fikk elevene et nytt møbiusbånd. Denne gangen skulle de tegne en ny strek som starter 1 cm fra ytterkanten på båndet samt fulgte ytterkanten til de kommer tilbake til startpunktet. Her skulle de på samme måte lage en hypotese som fortalte hva de trodde kom til å skje når de klippet, deretter utførte klippingen for å teste hypotesen, og til slutt diskutere seg frem til hvorfor utfallet ble som det ble.

Del 2 av opplegget omhandler volumet til sylindere. Opplegget er nærmere beskrevet i vedlegg 2, men vi vil også her gi en kort oversikt over hvordan oppgavene i del 2 er strukturert. I den første oppgaven skulle elevene konstruere to ulike sylindere ved hjelp av to identiske A4 ark. Den ene sylindere skulle konstrueres ved at elevene foldet arket over langsiden og den andre ved at de foldet arket over kortsiden. Når sylindrene var konstruert skulle elevene diskutere hvilken av sylindrene som rommet mest. Deretter skulle de teste påstanden sin ved å beregne volumet til sylindrene på flere måter. I den neste oppgaven skulle elevene lage en sylinder med større volum ved å bruke det samme A4 arket. Her hadde de alle hjelpemidler til disposisjon. Til slutt blir elevene bedt om å diskutere hvor stort volum en sylinder laget av et A4 ark kunne ha.

Vi mener at disse oppgavene til sammen danner et godt grunnlag for å kunne besvare problemstillingen. I forbindelse med utforming av oppgavene og opplegget, har vi benyttet oss av Hodge-Zickerman et al. (2020) sin beskrivelse av taktile lærings aktiviteter og Pedaste et al. (2015) sin utforskningssyklus. I diskusjonsdelen vil vi drøfte hvorvidt opplegget faktisk ble utforskende og taktilt (se kapittel 5.1.).

3.3.2.1. Hjelpemiddelbordet

Vi så at det var nødvendig å gi elevene tilgang til visse hjelpemidler. Dette var særlig to grunner til dette. For det første kjente vi ikke til elevenes forkunnskaper, derfor var det nødvendig med hjelpemidler for å sikre at elevene kunne gjennomføre oppgavene. Den andre grunnen var for å tilrettelegge for flere løsningsmetoder. På den måten fikk elevene rom til å utforske og være kreative når de løste oppgavene.

Vi plasserte følgende hjelpemidler på et separat bord: sylindere, møbiusbånd, linjaler, kalkulatorer, passere, sakser, snorer, boller, baljer, fargeblyanter, ark med ulike algebraiske formler, ris og sylinderbunner. Ved å plassere hjelpemidlene på et eget bord, måtte elevene selv vurdere hvilke ressurser som var hensiktsmessige for oppgaveløsningen.

3.4. GJENNOMFØRING

Gjennomføringen av prosjektet består av tre deler. Først gjennomførte vi et pilotprosjekt for å undersøke hvordan opplegget fungerte i praksis. Deretter gjorde vi noen endringer i oppgavene basert på hva vi observerte under pilotprosjektet. Til slutt gjennomførte vi hovedprosjektet. I det følgende vil vi beskrive de tre delene, *pilotprosjekt*, *tilpassing av oppgaver* og *hovedprosjekt*.

3.4.1. Pilotprosjektet

I pilotprosjektet ble tre tilfeldig utvalgte elever på 9. trinn invitert til å teste ut oppgavene våre. Elevene tilhørte en annen klasse enn de som deltok på hovedprosjektet, og var ikke selv en del av prosjektet. De ble ikke filmet, tatt opptak av eller innhentet opplysninger om. Rollen deres innebar kun å gi oss informasjon om hvordan vi kunne forbedre opplegget til hovedprosjektet. Elevene gjennomførte oppgavene i samme tidsrom som de ellers skulle hatt matematikk og jobbet med geometri, for å sikre at de ikke mistet undervisningstid. Det ble satt av 90 minutter til gjennomføringen, altså to vanlige skoletimer. For å gjøre situasjonen så lik hovedprosjektet

som mulig, ble det på forhånd bestemt at vi skulle ha en veiledende, men passiv rolle. Slik at vi kunne observere eventuelle uklare formuleringer, gjennomgikk vi ikke oppgavene før elevene startet. Hvis de sto fast, stilte vi hjelpende spørsmål for å få elevene på riktig spor. Eksempler på slike spørsmål er «hva mener dere med det?» eller «kunne man gjort det på en annen måte?».

Formålet med pilotgjennomføringen var å evaluere hvordan oppgavene fungerte i praksis. Ved å gjennomføre et pilotprosjekt, fikk vi innsikt i hvilke formuleringer som var for upresise, hvordan samarbeidet og diskusjonen fungerte med tre elever i gruppen og hva slags støtte som var nødvendig å gi underveis. Kort sagt var hensikten med pilotprosjektet å sikre best mulig gjennomføring for elevene i hovedprosjektet.

3.4.2. Tilpassing av oppgaver

Oppgavene som ble utarbeidet til pilotprosjektet var de samme som skulle brukes i hovedprosjektet. Hensikten var, som nevnt tidligere, å vurdere hvordan oppgavene fungerte i praksis med elevene. Etter pilotprosjektet, kom vi frem til at det var nødvendig å gjøre noen endringer før hovedprosjektet ble gjennomført.

For det første observerte vi at elevene brukte betydelig lenger tid enn først antatt på gjennomføringen. Da tiden vi hadde til disposisjon var over, hadde elevene kun fullført omtrent halvparten av oppgavene i del 2. Bakgrunnen for dette var at mye av tiden ble brukt til å enten konstruere nye møbiusbånd/sylindere eller tegne nye streker hvis de gjorde feil. Siden elevene flere ganger måtte avbryte det de holdt på med for å konstruere nye figurer, forstyrret det tankerekken til elevene, og man mistet mye tid til diskusjon. Selv om det er viktig at elevene selv konstruerer objektene de arbeider med (Hodge-Zickerman et al., 2020; Schoenfeld & Kilpatrick, 2013), var det lite hensiktsmessig at de måtte konstruere samme figur flere ganger. Vi bestemte derfor å forberede flere møbiusbånd og sylindere slik at elevene kunne bruke disse om det ble nødvendig etter å ha selv konstruert figurene én gang. Figurene ble lagt på hjelpemiddelbordet (se kapittel 3.3.2.1), og elevene kunne dermed hente dem ved behov.

For det andre merket vi at elevene, i del 1 av prosjektet, hadde problemer med å forstå begrepene «kant» og «side». Vi endret derfor formuleringen til «ytterkantkant» og «sideflate». Vi la også til en oppgave i starten av denne delen, hvor elevene skulle bli kjent med begrepene gjennom å diskutere hvor mange ytterkanter og sideflater en sylinder har (se vedlegg 1). Til slutt gjorde vi mindre justeringer knyttet til hjelpemidlene og deres plassering. For å gi elevene et bredere utvalg av ressurser for å utforske oppgavene, la vi til noen hjelpemidler, herunder tråd og relevante matematiske formler. Alle hjelpemidlene ble, som nevnt i kapittel 3.3.2.1, plassert på et eget «hjelpemiddelbord» for å gi bedre oversikt over tilgjengelige ressurser.

3.4.3. Hovedprosjektet

Med erfaringer fra pilotprosjektet, ble hovedprosjektet gjennomført med to elevgrupper på 9. trinn som hadde sagt seg villige til å delta i prosjektet. Hovedprosjektet bestod av de samme oppgavene som i pilotprosjektet, men var revidert slik at opplegget kunne gjennomføres på best mulig måte for å hjelpe oss med å besvare problemstillingen. Vår rolle var den samme som i pilotprosjektet, i det vi hadde en veiledende, men passiv rolle. Før elevene satte i gang med å løse oppgavene, hadde vi en gjennomgang av praktisk informasjon. Det ble blant annet informert om hvor elevene skulle sitte, hvor mikrofonene var plassert, at de måtte snakke høyt og tydelig, samt at diskusjon var viktigere enn utfyllende svar på oppgavearket. Hovedprosjektet ble gjennomført i to omganger, hvorav hver av de to elevgruppene fikk 90 minutter til disposisjon.

3.5. ANALYSEVERKTØY

Problemstillingen for denne masteroppgaven er; *Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?* For å besvare denne best mulig, er vi nødt til å fastslå noen vurderingskriterier for undersøkelsen. Ifølge C. R. Bjørndal (2017, s. 12-13) bygger vurdering på et utvalg av kriterier. Vi belyser derfor problemstillingen ved hjelp av et integrert rammeverk som er utarbeidet fra rammeverkene til Kilpatrick et al. (2001) og (Niss & Jensen, 2002). I oppgaven undersøker vi hvilken matematisk kompetanse som kommer til syne i elevenes arbeid gjennom de fem komponentene: *forståelse, resonnement, engasjement, beregning og anvendelse*. For å kunne

forstå etterarbeidet (kapittel 3.6.) som er gjort etter datainnsamlingen bedre, vil vi først presentere analyseverktøyet vi har brukt.

I analysen av datamaterialet benytter vi en fenomenologisk tilnærming med en hermeneutisk vektlegging av forståelse og fortolkning. Dette betyr at det er vår fortolkning av deltakernes diskusjoner og handlinger som danner grunnlaget for analysen og besvarelsen av problemstillingen vår. Analyseverktøyet inneholder relevant teori som støtter fortolkningsprosessen ved å gi oss konkrete kjennetegn på de fem komponentene for matematisk kompetanse som skal identifiseres. Prosessen med å utarbeide og operasjonalisere analyseverktøyet blir presentert i neste delkapittel.

3.5.1. Det integrerte rammeverket som analyseverktøy

Som nevnt tidligere, har teorien fra Niss og Jensen (2002) blitt innlemmet i Kilpatrick et al. (2001) sin teori for å danne et nytt integrert rammeverk som kan brukes til å identifisere matematisk kompetanse i elevenes arbeid. Vi har tidligere i teorikapittelet (kapittel 2.3.4.) redegjort for hvordan disse to teoriene styrker hverandre ved å sammen gi en helhetlig forståelse av hva matematisk kompetanse innebærer. Som grunnlag for analysen, har vi videre benyttet Kilpatrick et al. (2001) sin komponentinndeling: *forståelse*, *beregning*, *anvendelse*, *resonnering*, og *engasjement*. Niss og Jensen (2002) sin beskrivelse av de åtte matematiske delkompetansene brukes her som et supplement for å gi en mer detaljert beskrivelse av de fem komponentene til Kilpatrick et al. (2001). Det integrerte rammeverket bruker beskrivelser fra begge rammeverkene for å identifisere matematisk kompetanse. Integreringen av Niss og Jensen (2002) sine beskrivelser i Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter gir et nyansert bilde av matematisk kompetanse, og et bedre grunnlag for å identifiseres matematisk kompetanse i et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter.

Ved å se på sammenhengen mellom de to rammeverkene, vil Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter kunne beskrives mer konkret og bli enklere å identifisere. Disse komponentene omfatter flere av delkompetansene til Niss og Jensen (2002), noe som fører til en rikere teoretisk ramme for å forstå matematisk kompetanse. I analysen av datamaterialet, har vi derfor valgt å legge størst vekt på Kilpatrick et al. (2001) sine komponenter. Samtidig utvider vi vår

forståelse av disse komponentene ved å inkludere beskrivelser fra Niss og Jensen (2002) sine delkompetanser. Dette gir mer konkrete beskrivelser av komponentene. Hovedvekten ligger ikke på hva Niss og Jensen (2002) kaller de ulike delkompetansene, men på hvordan deres beskrivelser belyser ulike deler av den helhetlig matematisk kompetanse. Dette bidrar til å skape et integrert rammeverk som brukes til å forstå begrepet matematisk kompetanse samt hvordan det kan identifiseres og analyseres i elevenes arbeid med det utforskende og taktile geometriopplegget. I det følgende vil vi presentere noen beskrivende eksempler på hvordan det integrerte rammeverket er brukt som analyseverktøy.

Kilpatrick et al. (2001) og Niss og Jensen (2002) deler sin forståelse av den helhetlige matematiske kompetansen i forskjellige deler. Kilpatrick et al. (2001) beskriver dette gjennom fem komponenter, mens Niss og Jensen (2002) bruker åtte delkompetanser. Selv om disse delene har ulike navn, har de som formål å belyse den samme matematiske kompetansen. Vi ønsker derfor å vise hvordan ulike deler fra de to rammeverkene kan gi uttrykk for de samme aspektene ved matematisk kompetanse. For eksempel skriver Kilpatrick et al. (2001) om *beregning*. Beregning handler om at elever forstår og kan anvende matematiske prosedyrer på en fleksibel, effektiv og hensiktsmessig måte. Dette kan sammenliknes med *representasjonskompetansen* og *symbol- og formalismekompetansen* til Niss og Jensen (2002). *Representasjonskompetansen* innebærer at elevene kan velge å bruke hensiktsmessige representasjoner, samt tolke og forstå dem. *Symbol- og formalismekompetanse* handler om elevens evne til å forstå og bruke matematiske symboler, formler og notasjon på en meningsfull og presis måte. Dette betyr at elever som forstår hvordan de utføre matematiske prosedyrer og operasjoner på en fleksibel, nøyaktig og hensiktsmessig måte, benytter seg av både *representasjonskompetanse* og *symbol- og formalismekompetanse*. Niss og Jensen (2002) sine beskrivelser av delkompetansene vil derfor kunne brukes til å identifisere Kilpatrick et al. (2001) sin komponent *beregning*, ved å gi mer konkrete beskrivelser av hva som inngår i denne komponenten.

Representasjonskompetanse kan også knyttes til en av de andre komponentene til Kilpatrick et al. (2001). Dette kommer av at *representasjonskompetanse* handler om å forstå forskjellige representasjoner ved å omforme, tolke og skille mellom matematiske objekter, problemer eller situasjoner. En vesentlig del av *forståelse* er å vite hvorfor en matematisk idé er viktig og når den kan være nyttig. Kilpatrick et al. (2001) utdyper komponenten *forståelse* ved å beskrive at den innebærer at eleven er i stand til å representere matematiske situasjoner på ulike måter samt

forstå hvordan de kan anvendes til forskjellige formål. *Representasjonskompetanse* kan derfor knyttes til komponenten *forståelse*. Dersom elevene omformer, tolker og skiller mellom matematiske objekter, fenomener eller situasjoner, kan det brukes som en utvidet beskrivelse for å identifisere *forståelse*.

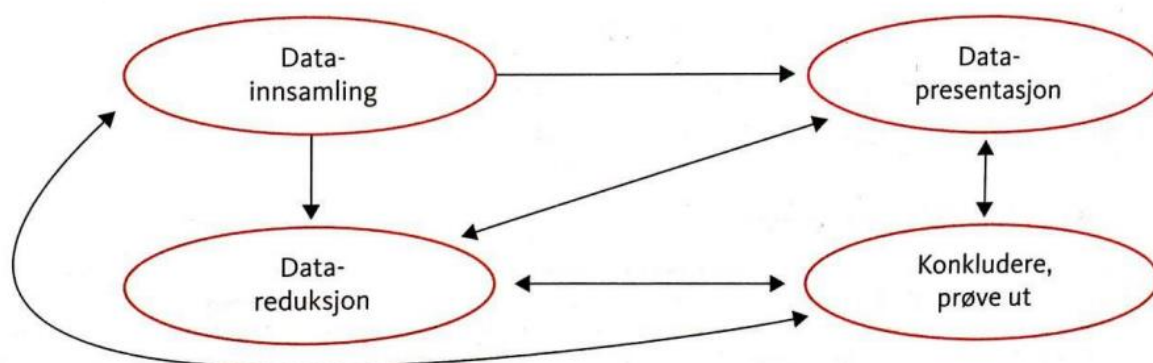
Oppsummeringsvis kan en si at det integrerte rammeverket gir en omfattende og detaljert forståelse av matematisk kompetanse, og det gjør det lettere å identifisere og analysere denne kompetansen i elevenes arbeid. Det gir derfor et solid grunnlag for å svare på problemstillingen.

3.6. ETTERARBEID

Etter å ha gjennomført forskningsprosjektet med de to elevgruppene samt samlet inn alle dataene, er vi nødt til å analysere dem. I dette kapittelet vil vi forklare analyseprosessen. Dette innebærer å fortelle om utvalg av situasjoner, transkribering av video- og lydopptakene og prosessen med å kode datamaterialet.

3.6.1. Analyseprosessen

Analyseprosessen innen kvalitativ forskning kan være kompleks, da det ikke finnes noen standardiserte metoder for hvordan en skal analysere slike data. Hensikten med analysen er å trekke vitenskapelige konklusjoner fra observasjonene (Ringdal, 2018, s. 252). I dette prosjektet brukes en modell som er beskrevet i Ringdal (2018, s. 252). Modellen representerer en generell fremstilling av en interaktiv analyseprosess for kvalitativ data (figur 4).



Figur 4: Modell for analyse av kvalitative data

Analyseprosessen i denne studien består av tre hovedelementer: *datareduksjon*, *datapresentasjon* og *konkludere/verifisere* (Ringdal, 2018, s. 252). I analysen har vi kodet hele datamaterialet for å kunne få et mer helhetlig bilde av den matematiske kompetansen som kommer til syne i opplegget (se kapittel 4.1.). Vi har imidlertid foretatt en datareduksjon ved å kun presenter noen utvalgte situasjoner i analyse- og resultatdelen (se kapittel 4.2.). Dette ble gjort da omfanget av oppgaven ikke lar oss presentere hele datamaterialet. Vi redusert materialet til fire situasjoner, to fra hver gruppe og en fra hver av oppgavene som de to gruppene jobbet med. Dette er gjort for å illustrere ulike deler av opplegget, hvordan matematisk kompetanse kommer til uttrykk, samt vise hvordan vi har tildelt de ulike kodene. Datamaterialet består av to videoer på 90 minutter hver. I begge disse videoene er det kodet for matematisk kompetanse ved hjelp av det integrerte rammeverket.

Datapresentasjon er også viktig for analysen (Ringdal, 2018, s. 252). Vi har transkribert hele datamaterialet, og deretter kodet det basert på det integrerte rammeverket. Resultatene fra kodingen er presentert i tabeller og diagrammer (se kapittel 4.1.). Kodingen er utført for å kartlegge og skape oversikt over datamaterialet i forhold til problemstillingen og teorien. Konklusjonen vokser frem gjennom analyseprosessen (Ringdal, 2018, s. 253). Som forskere er vi innom elementer fra konklusjonen når de framtrer i de ulike fasene av analysen, men den endelige konklusjonen presenteres først i avslutningen.

3.6.2. Utvalg av situasjoner

De fire situasjonene som skal analyseres videre er hentet fra transkripsjonen. Vi har valgt to situasjoner fra begge gruppene (se kapittel 4.2.). Fra gruppe 1 har vi valgt ut en situasjon fra den siste delen av arbeidet med møbiusbåndoppgaven og en situasjon fra starten av arbeidet med sylinderoppgaven. Fra gruppe 2 har vi valgt ut en situasjon fra starten av arbeidet med møbiusbåndoppgaven og en fra slutten av arbeidet med sylinderoppgaven.

Det er særlig tre grunner til at vi har valgt disse situasjonene. Først og fremst er det for å illustrere de ulike delene av opplegget, og på den måten bidra til å besvare problemstillingen. Da er det først nødvendig å vurdere om opplegget faktisk er utforskende og benytter taktile

læringsaktiviteter. Ved å presentere forskjellige situasjoner fra opplegget, kan vi diskutere om dette er tilfelle (se kapittel 5.1.). Den andre grunnen til valg av situasjonene, er for å illustrere hvordan matematisk kompetanse kommer til uttrykk i det utforskende og taktile geometriopplegget. Den tredje og siste grunnen til at vi har valgt ut akkurat disse situasjonene, er for å gi en detaljert beskrivelse av hvordan vi har identifisert de fem komponentene av matematisk kompetanse ved hjelp av det integrerte rammeverket.

3.6.3. Transkribering

Datamaterialet i studien er basert på transkripsjoner av to undervisningsopplegg på omtrent 90 minutter hver. Elevene deltok da i et geometriopplegg som hadde til formål å være utforskende og taktilt. Vi transkriberte materialet fra video- og lydopptak av elevenes arbeid med læringsaktivitetene. Siden elevene arbeidet med taktile læringsaktiviteter, var det viktig å inkludere handlingene deres i transkripsjonen. Dette setter elevenes dialog i kontekst.

Samtalen	Bemerkninger
Astrid: Å! Det er to tvister, ikke sant. For da er vi jo.. Vent da.. Det blir bare sånn..	[viser med sylindren, at selv om man tvister den rundt har den fortsatt to sider]
Mille: Så vi blir tvista fram og så tilbake.	
Astrid: Se! Fordi, en, to.	[viser med sylindren igjen]
Mille: Ja!, de blir jo bare tvista sånn under der.	[peker på sylindren til Astrid]
Astrid: De blir jo bare tvista sånn.	[viser til Elsa]
Elsa: Mhm.	

Figur 5: utdrag fra transkripsjon

Transkripsjonene består av to kolonner, herunder «samtalen» og «bemerkninger» (figur 5). Vi utførte en grundig transkripsjon av opptakene, hvor både verbale og ikke-verbale uttrykk ble notert. Dette ble gjort for å få et bedre bilde av kommunikasjonen mellom deltakerne, samt forstå sammenhengen mellom elevenes handlinger og dialoger. I den første kolonnen ble elevenes samtaler transkribert. Denne kolonnen inneholder uttalelser fra elevene, men er likevel redusert til det vi har vurdert som betydningsfullt for utførelsen av oppgaven. Det betyr

at kommentarer fra elevene som ikke var knyttet til oppgaven, ikke ble inkludert i transkripsjonene. For å forstå konteksten rundt elevenes diskusjon, inneholder den andre kolonnen bemerkninger, og den omfatter enkelte gester, bevegelser og handlinger som vi anså som betydningsfulle for analysen.

For å sikre forståelighet og konsistens i transkripsjonene, fulgte vi standard transkriberingskonvensjoner. Vi erstattet også deltakernes navn med pseudonymer for å ivareta personvernet. Ettersom vi er to forskere i dette prosjektet, har vi hatt muligheten til å transkribere opptakene uavhengig av hverandre før vi sammenlignet og verifiserte dem. Dette er med på å sikre at transkripsjonene ble korrekte og nøyaktige, og at ikke viktig informasjon ble utelatt. Til slutt har vi også gjennom hele prosessen med å transkribere og analysere, reflektert over våre egne forutinntatte meninger og tolkninger (Finlay, 2002, s. 211). Dette bidrar til å øke bevisstheten om hvordan vår egen posisjon som forskere kan påvirke tolkningen av dataene og analysen. Ved å følge en detaljert og systematisk tilnærming til transkribering, og ved å være oppmerksomme på vår egen posisjon som forskere, kunne vi sikre at analysen av dataene var grundig, pålitelig og relevant for problemstillingen.

3.6.4. Koding

Kodingen av transkripsjonene er basert på det integrerte rammeverket (se kapittel 2.3.4.), og har som formål å kartlegge hvilke komponenter av matematisk kompetanse som kommer til syne i et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter. Det er viktig å påpeke at kodingen er et resultat av vår fortolkning av datamaterialet i forhold til det aktuelle rammeverket. Vår rolle som forskere påvirker derfor kodingen og de påfølgende resultatene. Ettersom forståelse og tolkning er tett knyttet til de som utfører studien (Creswell & Poth, 2016, s. 181), kan det diskuteres om andre forskere ville kodet materialet på samme måte og oppnådd de samme resultatene. For å sikre minst mulig forutinntatthet og mest mulig reliabilitet i resultatene, valgte vi å kode datamaterialet i tre omganger. Først kodet vi hver for oss. Deretter sammenliknet vi kodene, og kom da til enighet hvor vi hadde kodet ulikt. Dette styrker studiens Reliabilitet. Vi vil senere komme tilbake til hvordan vi kom til enighet når vi hadde kodet ulikt.

Kodingen av datamaterialet er en sentral del av metoden for å identifisere og analysere de ulike komponentene i undervisningsopplegget. Vi opprettet en kolonne til venstre i transkripsjonene for kodingen. De ulike matematiske komponentene som er utgangspunktet for kodene har her fått hver sin kode etter den første bokstaven i komponenten: **[F]** *forståelse*, **[R]** *resonnement*, **[E]** *engasjement*, **[A]** *anvendelse* og **[B]** *beregning*. Under er det vedlagt en illustrasjon på hvordan kodingen har blitt gjort.

Koder	Samtalen	Bemerkninger
F R E A	Astrid: Å! Det er to tvister, ikke sant. For da er vi jo.. Vent da.. Det blir bare sånn..	[viser med sylindere, at selv om man tvister den rundt har den fortsatt to sider]
F R	Mille: Så vi blir tvista fram og så tilbake.	
F R E A B	Astrid: Se! Fordi, en, to.	[viser med sylindere igjen]
F R E	Mille: Ja!, de blir jo bare tvista sånn under der.	[peker på sylindere til Astrid]
F R E	Astrid: De blir jo bare tvista sånn.	[viser til Elsa]
	Elsa: Mhm.	

Figur 6: Utklipp fra transkripsjon med koder

Alle elevuttalelser som er transkribert i kolonnen «samtalen» er nøye analysert, og vi har søkt etter alle kodene i hver enkelt ytring. Ytringene har fått koder basert på vår tolkning av det de gir uttrykk for. Hvis en ytring samsvarte med beskrivelsen av en komponent i det integrerte rammeverket, ble bokstaven for den aktuelle koden plassert i kolonnen til venstre (se figur 6). I noen tilfeller kunne vi ikke identifisere noen komponenter i en ytring, mens i andre tilfeller kunne flere eller alle komponentene identifiseres. Kodene er bestemt ut fra vår tolkning av hva som ligger til grunn for hver uttalelse. Tolkningen må sees i lys av vår forståelse og tolkning av det integrerte rammeverket som analyseverktøy (se kapittel 3.5.1.). Vi vil videre gi et eksempel på hvordan en uttalelse kan gi uttrykk for flere koder samtidig og til slutt vil vi gi et eksempel på hvordan vi kom til enighet når vi hadde kodet ulikt.

I figur 6 under tredje ytring uttrykker Astrid: «Se! Fordi, en, to.». Siden vi tolker ytringen slik at alle de matematiske komponentene kommer til uttrykk, har vi tildelt den alle kodene [F R E A B]. [F] for *forståelse* kan identifiseres gjennom Astrids uttrykk: «Fordi, en, to». Dette kan tolkes slik at hun forstår at antall tvister er avgjørende for å bestemme antall sider den nye figuren har. [R] for *raisonnement* kommer frem når hun både teller høyt, uttrykker: «Se! Fordi.» og viser med sylindren. Ytringen antyder at Astrid tenker logisk ved å konkludere med at den nye figuren må ha to sider fordi den har to tvister og bruker sylindren som eksempel. At hun uttrykker dette høyt ovenfor de andre elevene kan tolkes som en forklaring og begrunnelse for hvorfor figuren har to sider. [E] for *engasjement* fremkommer i uttalelsen ved at Astrid sier «Se!». Denne ytringen kan tolkes som en positiv opplevelse av mestring og et ønske om å vise de andre elevene hva hun mener. Vi tolker dette som at eleven har tro på at hun kan mestre og forstå oppgaven. [A] for *anvendelse* bli synlig når Astrid sier «Fordi, en to.», noe som viser at eleven jobber med å løse problemet ved å bruke telling som metode. Til slutt identifiserte vi [B] for *beregning*, da Astrid telte antall tvister og med det viste at hun kunne benytte en hensiktsmessig metode for å løse problemet.

På samme måte som illustrert ovenfor, har vi individuelt gjennomgått hver enkelt ytring og satt dem opp mot det integrerte rammeverket. Etter det, sammenliknet vi resultatene våre og kom til enighet der vi hadde kodet ulikt. Et eksempel på en ytring vi kodet ulikt, er den femte ytringen i figur 6. Her uttrykker Astrid: «Det ble jo bare tvista sånn. [Viser med figuren]». Denne ytringen har fått kodene [F R E], men da vi først kodet individuelt, hadde kun en av oss gitt koden [E]. Dette kommer av at det kan være vanskelig å identifisere engasjement i utsagnene ved å kun lese transkripsjonene. I dette tilfelle valgte vi å gå tilbake i videoopptaket for å få en bedre oversikt over omstendighetene rundt ytringen. Vi tolket det slik at Astrid viste engasjement ved å vise frem figuren og konstatere at «den bare ble tvista sånn.». Gjennom handlingen og uttalelsen tolket vi det som at hun viste tegn på at hun har tro på egne ferdigheter og at hun kan mestre oppgaven. Vi kom dermed til en enighet om å kode ytringen med [E].

Under kodingen, fokuserte vi på én komponent av gangen. Det vil si at vi først kodet for én komponent ved å gjennomgå hele transkripsjonen. Deretter gjentok vi prosessen for hver av de andre komponentene. Siden forståelse og tolkning påvirkes av dynamiske menneskelige faktorer (Merriam & Tisdell, 2015), kan disse spille en rolle i koding av transkripsjoner. For å forsøke å få en mest mulig konsistent tolkning, valgte vi derfor å kode for en komponent om gangen.

3.7. ETISKE OVERVEIELSER

Ifølge Kvale et al. (2009) handler etikk om moralske spørsmål knyttet til undersøkelsen og målet med den. Vi har gjennom hele prosjektet fulgt etiske retningslinjer og prinsipper. Dette er gjort for å beskytte deltakerne og deres personvern, og for å opprettholde forskningens integritet. Vi har ivaretatt våre etiske forpliktelser som forskere og bidratt til ansvarlig etisk forskningspraksis på flere måter. For det første har vi oppbevart forskningsdataene på en sikker server som kun vi, som prosjektets forskere, har hatt tilgang til. Dette er gjort etter anbefalinger fra Kvale et al. (2009, s. 105). For det andre har vi for å beskytte identiteten til deltakerne, anonymisert dem ved å gi dem pseudonymer i transkripsjonene (Bryman, 2016, s. 126).

For å få godkjenning til å utføre forskning, sendte vi inn en søknad til NSD (Norsk senter for forskningsdata). Søknaden er godkjent (se vedlegg 4) og viser at forskningsprosjektet oppfyller de nødvendige kravene til etiske retningslinjer og personvern. Til slutt vil vi påpeke at alle deltakerne i prosjektet har mottatt et samtykkeskjema med informasjon om prosjektet samt deres rettigheter. Siden elevene er under 15 år, ble skrevet underskrevet av elevenes foresatte. Dette er i tråd med prinsippet om frivillighet og informert samtykke som er viktige elementer i forskningsetiske retningslinjer (Creswell & Creswell, 2018, s. 123; NESH, 2021).

3.7.1. Samtykke

Forskning som involverer barn krever spesiell oppmerksomhet, da de har krav på beskyttelse. Vi har derfor innhentet samtykke fra elevenes foresatte gjennom et samtykkeskjema. Dette er et krav når det skal forskes på barn (Backe-Hansen & Frønes, 2012, s. 17). Elevene ble informert om formålet med studien, at deltakelse var frivillig og at de kunne trekke seg når som helst hvis de ønsket det. Denne informasjonen ble formidlet til deltakerne muntlig på skolen og skriftlig gjennom samtykkeskjemaet for å sikre at det ble forstått (se vedlegg 3). Vi oppfordret også deltakerne til å ta kontakt med oss hvis de skulle ha noen spørsmål. Innholdet i samtykkeskjemaet ble godkjent av NSD, og underskrevet av deltakernes foresatte før forskningen startet.

3.7.2. Forskning på barn

Tangen (2010) sier at forskningsetikk blant annet innebærer beskyttelse av deltakerne. Når forskning involverer barn, er det viktig å ta spesielle hensyn for å ivareta barnets interesser. Backe-Hansen og Frønes (2012, s. 17) påpeker at barn har rett til beskyttelse, men også til utvikling. Dette innebærer at de bør få mulighet til å delta i forskning som kan støtte den faglige utviklingen deres. Før prosjektet ble gjennomført, konsulterte vi oss med faglæreren til elevene som deltok i prosjektet. På den måten fikk vi et innblikk i hvilke forutsetninger de hadde. Vi forsøkte deretter å tilpasse oppgavene så langt det var mulig for å imøtekomme elevenes antatte ferdighetsnivå. Opplegget ble således utarbeidet basert på informasjonen fra læreren, elevenes alder og ferdighetsnivået deres. Etter å ha gjennomført pilotprosjektet, justerte vi oppgavene samt definerte lærerens rolle med hensyn til elevenes forutsetninger. Målet var at elevene skulle kunne føle mestring gjennom hele forskningsprosessen.

3.8. RELIABILITET OG VALIDITET

Reliabilitet handler om konsistensen og troverdigheten til forskningsresultater, og kan dreie seg om i hvilken grad resultatene i studien kan reproduseres av andre på et senere tidspunkt (Kvale et al., 2009, s. 250). For vårt tilfelle, er studiens analyse basert på en kvalitativ hermeneutisk tilnærming. Dette betyr at forskningsprosessen og resultatene vil være avhengige av den som utfører forskningen. En konsekvens av dette vil være at forskningens objektivitet og troverdighet avhenger av vår forståelse og tolkning. For å styrke reliabiliteten til studien, har vi forsøkt å være gjennomtsiktige. For å hjelpe oss med å tolke dataene og identifisere de ulike komponentene av den matematiske kompetansen, har vi utarbeidet et integrert rammeverk. I tillegg har vi beskrevet hvordan vi har operasjonalisert rammeverket ved å gi eksempler på hvordan vi har kodet datamaterialet. Vi har ytterligere forsøkt å styrke studiens reliabilitet ved å transkribere og kode datamaterialet i flere omganger.

Transkripsjonen ble utført i to trinn. Først transkriberte vi datamaterialet individuelt. Deretter sammenlignet vi transkripsjonene for å sikre at ikke viktig informasjon ble utelatt. Siden vi benyttet oss av video- og lydopptak som metode, kunne vi ved hjelp av opptaket sammenligne transkripsjonene våre og verifisere innholdet. Ved at vi sikret korrekte og presise gjengivelser

av situasjonene, styrket vi reliabiliteten (Kvale et al., 2009, s. 190). På samme måte styrket vi reliabiliteten i kodingsprosessen ved at vi kodet datamaterialet separat før vi gjennomgikk alle kodene sammen og kom til enighet der vi hadde kodet ulikt. Dette var med på å sikre at vår forståelse og fortolkning av datamaterialet var tett knyttet opp mot beskrivelsene i det integrerte rammeverket. Gjennom hele prosessen med transkribering og analyse, har vi vært oppmerksomme på våre egne tolkninger og forutinntatte meninger (Kvale et al., 2009, s. 481). Dette har bidratt til å øke bevisstheten om hvordan vår posisjon som forskere kan påvirke tolkningen av dataene og analysen av dem.

Det er viktig å nevne at studien ikke er uten svakheter. Grunnet et lite utvalg informanter, vil svarene vi får i denne studien være tett knyttet til deltakerne. Deres evne til å samarbeide, formidle og bygge videre på hverandres argumenter, er avgjørende for resultatet, da det kun er mulig å si noe om kompetansen som blir uttrykt. I tillegg kan det være vanskelig å identifisere riktig komponent av matematisk kompetansen i elevenes samtaler, da komponentene er nært knyttet til hverandre. Det betyr at vi kan ha identifisert enkelte komponenter som andre forskere ikke ville identifisert eller motsatt.

I forskning handler validitet om hvorvidt det som presenteres er sant og riktig. Med andre ord handler validiteten til studien om å sikre at forskningen faktisk undersøker det den hevder å undersøke (Kvale et al., 2009). I denne studien undersøker vi hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres i et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter. Problemstillingen er avgrenset slik at den kan besvares, og vi har valgt å fokusere på identifikasjon av matematisk kompetanse fordi det kan være utfordrende å observere utviklingen av kompetanse. For å styrke validiteten har vi benyttet to anerkjente rammeverk for matematisk kompetanse, og utviklet et integrert rammeverk som gir detaljerte beskrivelser av hvordan vi kan identifisere ulike komponenter av matematisk kompetanse. I diskusjonen (se kapittel 5.1) vil vi også vurdere om geometriopplegget faktisk er utforskende og benytter taktile læringsaktiviteter. Til slutt støttes validiteten til studien ytterligere ved at vi har forankret analysen i relevant teori ut fra det problemstillingen spør om. Hvor valid forskningen vår er, vil avhenge av hvor godt vi beskriver rammeverket samt hvor godt vi har formidlet vår tolkning av teorien.

4. RESULTAT OG ANALYSE

Problemstillingen i oppgaven går ut på å undersøke hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres i elevers arbeid med to geometrioppgaver. For å undersøke dette, har vi valgt å analysere datamaterialet gjennom følgende problemstilling;

Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?

Videopptakene, som er gjort av elevenes arbeid i dette prosjektet, viser hvordan seks elever på 9. trinn arbeider når de i grupper på tre skal utforske egenskapene til et møbiusbånd og volumet til to ulike sylindere laget av samme A4-ark.

Analysen er delt i to deler. Første del (kapittel 4.1) presenterer samlede resultater av koder som er identifisert i elevenes arbeid med de to oppgavene. Resultatene baserer seg på de to gruppens arbeid med to utforskende og taktile geometrioppgaver (se vedlegg 1 og 2). Ved å presentere resultatene fra kodingen, blir det mulig å vurdere hvordan de to gruppene uttrykker de fem komponentene av matematisk kompetanse i arbeidet med oppgavene. De fem matematiske komponentene er: forståelse [F], beregning [B], resonnement [R], anvendelse [A] og engasjement [E]. I den andre delen (kapittel 4.2) tas det utgangspunkt i de matematiske komponentene for å presentere og analysere enkeltutdrag fra transkripsjonene. Analyseverktøyet som ble brukt her, ble utformet med formål om å identifisere den matematiske kompetansen som ble uttrykt i elevenes arbeid. Gjennom disse delene er problemstillingen undersøkt.

4.1. RESULTATER FRA KODINGEN AV DATAMATERIALET

Resultatene fra de to gruppens arbeid med møbiusbånd- og sylinderopgaven, er vist i de to tabellene nedenfor. Vi har valgt å presentere resultatene separat for hver gruppe og hver oppgave. Tabellene viser frekvensen av identifiserte komponenter hos begge gruppene og for

begge oppgavene når gruppene kombineres. For å enklere kunne observere forekomsten av komponentene, inkluderer tabellen også en kolonne som viser den prosentvise frekvensen av hver kode.

Matematisk komponent	Gr.1	Gr.1 prosent	Gr.2	Gr.2 prosent
Forståelse	171	23%	214	27%
Beregning	64	9%	55	7%
Resonnement	268	36%	259	32%
Anvendelse	95	13%	92	11%
Engasjement	140	19%	187	23%

Figur 7: Tabell som viser identifiserte koder i gruppene.

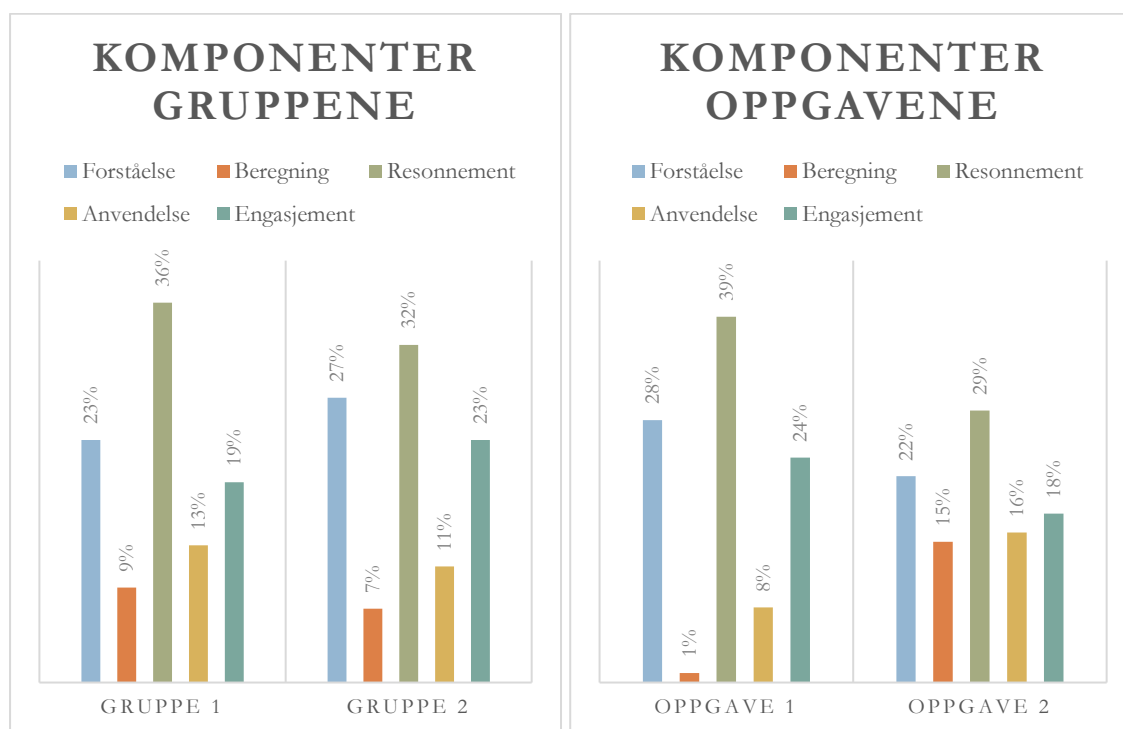
Matematisk komponent	Oppg.1	Oppg.1 prosent	Oppg.2	Oppg.2 prosent
Forståelse	228	28%	157	22%
Beregning	9	1%	110	15%
Resonnement	318	39%	209	29%
Anvendelse	69	8%	118	16%
Engasjement	193	24%	134	18%

Figur 8: Tabell som viser identifiserte koder i oppgavene.

4.1.1. Resultater presentert i prosent

For å visuelt sammenlikne gruppene og oppgavene, er resultatene fra figur 7 og 8 gjengitt i figur 9 og 10 som søylediagram. Dette viser forholdet mellom de ulike matematiske komponentene for de to gruppene og de to oppgavene. Her kan vi se at de tre matematiske komponentene forståelse [F], resonnement [R] og engasjement [E] er mest fremtredende, mens komponentene beregning [B] og anvendelse [A] forekommer i mindre grad. Dette gjelder både når man ser på gruppenes separate arbeid med begge oppgavene, og når man samler gruppene,

men skiller oppgavene fra hverandre. Det er verdt å nevne at den største forskjellen mellom komponentene forekommer når vi ser på elevenes arbeid med oppgave 1.



Figur 9 Søylediagram som viser koding av matematiske komponenter i prosent for de to gruppene.

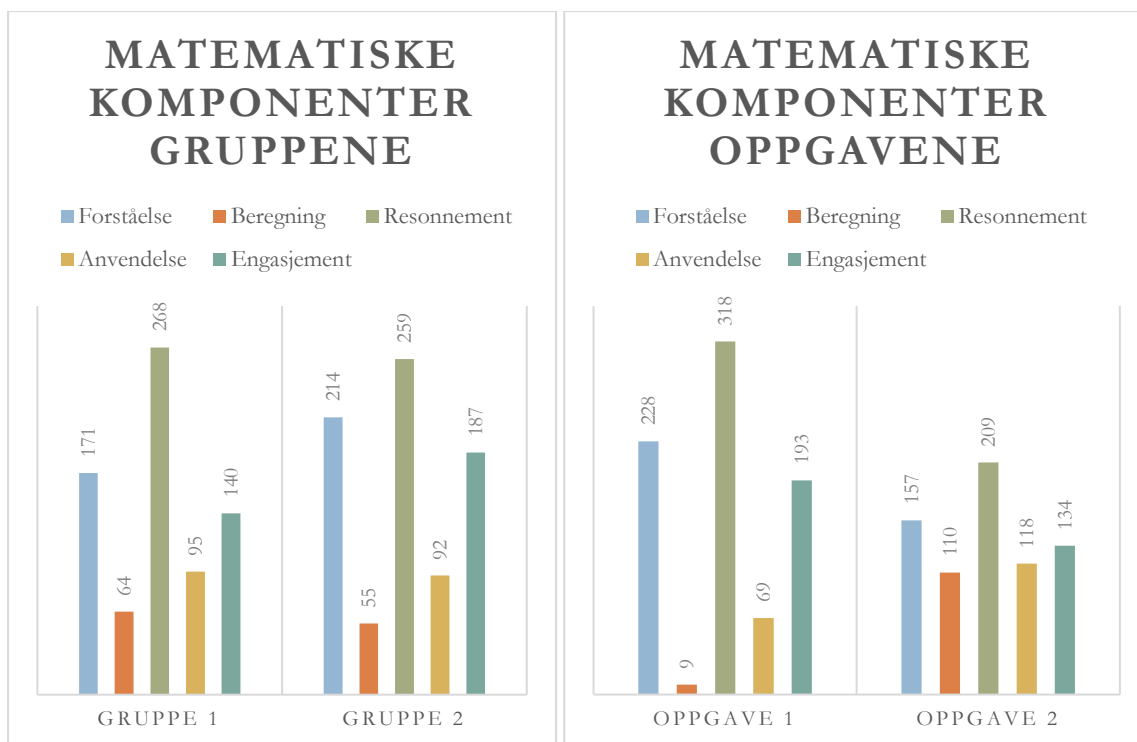
Figur10: Søylediagram som viser koding av matematiske komponenter i prosent for de to oppgavene.

Hvis vi starter med å ta for oss tabellen som viser de to gruppenes samlede arbeid med begge oppgavene (figur 9), ser vi at det er komponenten resonnement som er mest fremtredende, etterfulgt av forståelse og engasjement. Minst fremtredende er komponenten beregning, og litt over denne finner vi anvendelse. Det kan være flere grunner til at beregning og anvendelse er mindre fremtredende, og vi vil komme tilbake til mulige årsaker senere. Fordelingen av komponentene skiller seg i liten grad fra hverandre når man sammenlikner de to gruppene. Det er imidlertid en noe jevnere fordeling mellom de tre mest fremtredende komponentene i gruppe 2 sammenliknet med gruppe 1. Om man sammenlikner de to gruppene er det flere likheter i fordelingen av komponentene. I begge gruppene er rekkefølgen på komponentene fra færrest til flest identifisert helt lik.

Den andre tabellen (figur 10) viser hvilke komponenter som kommer frem i de to oppgavene. Vi har her valgt å legge sammen alle kodene som ble identifisert i de to gruppene, for deretter å fordele de på de to oppgavene elevene har jobbet med. På den måten får man et innblikk i hvordan frekvensen av kodene er fordelt på de to oppgavene. Det er fortsatt komponenten *resonnement* som er mest fremtredende i begge oppgavene, etterfulgt av *forståelse* og *engasjement*. I oppgave 1 er komponenten *beregning* minst fremtredende, og *anvendelse* nest minst fremtredende. Skillet mellom de tre mest og de to minst fremtredende komponentene er stor i oppgave 1. I oppgave 2 er det fortsatt *resonnement* som kommer tydeligst frem, etterfulgt av *forståelse* og *engasjement*. Skillet mellom disse er for øvrig mindre i oppgave 2 enn i oppgave 1. Søylediagrammet som viser oppgave 2 skiller seg fra de andre ved at komponentene er jevnere fordelt mellom søylene i denne figuren. Når man sammenligner de to tabellene, kan man se at frekvensen av de identifiserte komponentene er ganske lik ved sammenligning av gruppene. Frekvensen er imidlertid ganske ulik ved sammenligning av de to oppgavene.

4.1.2. Resultater presentert i antall koder

For å få en dypere forståelse av hva som ligger i resultatene, har vi i tillegg til den prosentvise fordelingen fremstilt i figur 9 og 10, inkludert to tabeller som viser antall koder (se figur 11 og 12). Grunnen til dette er at modellen som viser den prosentvise fordelingen av resultatene kan føre til feiltolkninger ved sammenlikning mellom gruppene og oppgavene. Dette er basert på måten modellen fremstiller kodingsresultatene på. Derfor viser tabellen under antall koder for hver av gruppene i deres arbeid med oppgavene.



Figur 11: Søylediagram som viser koding av matematiske komponenter i antall for de to gruppene.

Figur 12: Søylediagram som viser koding av matematiske komponenter i antall for de to oppgavene.

Ved å se på resultatene presentert i antall koder i stedet for prosentvis, vil en kunne oppdage andre sider ved kodingen av elevenes samtaler. Det blir da særlig tydelig hvor lite som skiller gruppene fra hverandre med tanke på hvor mange ganger de ulike komponentene er identifisert i samtalene deres totalt. Forskjellene mellom oppgave 1 og 2 kommer også enda tydeligere frem når resultatene presenteres på denne måten.

4.2. MATEMATISK KOMPETANSE I ELEVENES SAMTALER OG HANDLINGER

For å fremstille de ulike komponentene som er identifisert i elevenes dialoger og handlinger på en bedre måte, har vi valgt å vise frem noen utdrag fra transkripsjonene. For å vise hvordan komponentene kan identifiseres, har vi valgt ut enkelte sekvenser. Utdragene viser også

hvordan vi har kodet, samt gir innsikt i hvordan elevene arbeider utforskende med taktile læringsaktiviteter. På grunn av oppgavens omfang, vil vi ikke ta for oss alle tilfellene av identifiserte komponenter, men kun vise noen eksempler ved hvert utdrag.

4.2.1. Gruppe 2 møbiusbåndoppgave

Ja, nei... Ahh! Du koder!

Elevene i gruppe 2 består av tre jenter, som har fått de fiktive navnene Mille, Elsa og Astrid. Jentene er på dette tidspunktet ca. 25 minutter inn arbeidet med oppgaven, og har frem til da jobbet med å konstruere og utforske et møbiusbånd. De har forsøkt å identifisere hvor mange ytterkanter og sideflater båndet har ved å la fingrene sine følge ytterkanten og sideflaten fra punkt A på den ene siden, til punkt B på motsatt side og så tilbake til punkt A uten å endre retning (se vedlegg 1). Etter det, tegnet de en strek langs midten av båndet som skulle gå gjennom begge punktene på samme måte som med fingeren for å se om det var mulig. Deretter kom de med en konklusjon om hvor mange sider båndet hadde. Jentene konkluderte med at båndet hadde en sideflate og en ytterkant. I den neste oppgaven fikk jentene beskjed om å lage en hypotese som skulle fortelle hva de trodde kom til å skje når de klippet båndet på langs. Dialogen nedenfor, begynner etter at jentene har klippet båndet og oppdaget hva som skjedde. Samtaleutdraget er valgt ut for å vise hvordan elevene utforsker egenskapene til et møbiusbånd på en taktil måte. Under er det lagt ved en illustrasjon av møbiusbåndet før det ble klippet, og figuren som oppsto etter klippingen (heretter kalt figur-alfa). Etter illustrasjonene, vil oppgaven som elevene jobbet med bli presentert før samtaleutdraget starter.



Figur 13: Bilde av møbiusbåndet før elevene klippet i det.

Figur 14: Bildet av den nye figuren som oppsto etter klippingen. (figur-alfa).

Klipp båndet langs streken.

Hva skjedde? Hvilke(n) figur(er) fikk dere? Hvor mange «tvister» har de(n)? Hvor mange sideflater/ytterkanter har de(n)? Diskuter og skriv ned.

- 1) *[Jentene klipper]*
- 2) *Mille: Ja, nei... Ahh! Du kødder!*
- 3) *Elsa: Hæ!?*
- 4) *Astrid: Nei, hva!?*
- 5) *Mille: Haha*
- 6) *Elsa: Hæ?*
- 7) *Astrid: Hæ? Hahaha.*
- 8) *Mille: Åja, det går jo ikke an at de løsner fra hverandre... Men hvordan er de satt fortsatt sammen?*

9) Astrid: Hæ! Haha.

10) Astrid: Åja, fordi jeg tenkte egentlig nå at vi skulle klippe dem sånn rett av. [viser at hun tenkte å klemme sammen båndet og klippe det på langs]

Jentene fikk i oppgave å lage en hypotese om hva de trodde kom til å skje når de klippet båndet langs streken de tegnet. Dette utdraget viser reaksjonene deres etter at de ser hva som faktisk skjedde. Elevene virker forvirret over at møbiusbåndet ikke ble til to figurer. Dette gjør at samtalen er preget av spørrende utsagn og latter.

I denne delen av samtaleutdraget har vi kun identifisert de to komponentene *engasjement* og *resonnement*. **Engasjement** kommer tydelig frem gjennom elevenes verbale og ikke-verbale uttrykk. Jentene viser nysgjerrighet og interesse når de reagerer med overraskelse og forvirring rundt den nye figuren som oppstår. Når Mille utbryter "Ja, nei... Ahh! Du koddet!" i utsagn 2, og Elsa og Astrid reagerer med forvirring samt overraskelse i utsagn 3 og 4: "Hæ!?" og "Nei, hva!?", tolker vi dette som at elevene er personlig investerte og involverte i oppgaven. Videre viser utsagn 5, 7 og 9 at elevene ler når de ser figur-alfa (figur 11) for første gang. Dette tolker vi som at elevene blir overasket over at resultatet ikke ble som de trodde, og det indikerer engasjement. Trenden vi ser her går igjen i begge gruppene flere ganger i løpet av oppgavene. Elevene virker å vise en investering og et engasjement rundt oppgaven rett etter at de har klippet i figuren og oppdager hva som skjer.

Selv om utdraget primært viser den matematiske komponenten engasjement, har vi identifisert **resonnement** ved ett tilfellet. I utsagn 8 viser Mille nysgjerrighet rundt figur-alfa sin sammensetning, og prøver å finne en logisk forklaring på dette. Her analyserer hun informasjonen hun har fått, og prøver å forstå resultatet ved å resonnerer rundt det hun ser.

I den fortsettende samtalen etter utdraget ovenfor, diskuterer elevene hvordan de klippet i møbiusbåndet, før en av studentene foreslår at elevene kan prøve å dele en vanlig sylinder i to for å sammenlikne resultatene. Elevene diskuterer og kommer frem til at sylindere må bli delt i to smalere sylindere. Mille sier «Ja, men for den der blir jo to [peker på sylindere]», før hun begrunner det med «Men det er fordi den ikke har noen skru». Elsa og Astrid er enige. Deretter diskuterer de hva som skjedde med møbiusbåndet og hvor mange tvister den nye figuren fikk. Elevene konkluderer med at figuren ble lenger, smalere og fikk flere tvister. De bestemmer antall tvister ved å telle hvor mange ganger båndet er vridd: «Det ble to da. En, to [teller] En

krøll liksom. Ja, se, du fikk en tvist her nede, ser du den? Og en tvist her oppe.» De konkluderer med at figur-alfa har to tvister. Elevene ser seg dermed ferdige med oppgaven, og forsøker å gå til neste. Vi minner dem da på at det fortsatt er en del av oppgaven de ikke har svart på. Dette er i korte trekk beskrivelsen av det som har skjedd, før samtaleutdraget fortsetter:

- 11) Astrid: Åja. Hvor mange sider har den nå?*
- 12) Mille: En!*
- 13) Astrid: Vent da, da må vi bare gjøre det deres trikset da. B ... Vent da nei, jeg kan starte på A da. Ja. A ... Hvis jeg kommer til ... Jeg bare gjør sånn ... Tegner en firkant og en trekant.*
- 14) Mille: Det funker fortsatt, det er bare litt vanskeligere med de twistene. [Mille mener at figuren fortsatt har en side]*
- 15) Astrid: Vent da. Nå starter jeg på firkanten ... Og så.*
- 16) Elsa: Jeg kommer bare på ... B, B.*
- 17) Mille: Men det er jo bare de twistene som er i veien.*
- 18) Elsa: Jeg kommer bare på den samme.*
- 19) Astrid: Jeg å.*
- 20) Mille: Åja, den samme sida.*
- 21) Elsa: C og D kommer ikke sammen.*

I utdraget ovenfor forsøker elevene å avgjøre hvor mange siderflater båndet har. Til å begynne med tror Mille at figuren kun har en sideflate. Astrid og Elsa bruker en tidligere metode for å undersøke dette. Ved å følge flaten på båndet fra et punkt på den ene siden og se om de kan komme tilbake til dette punktet ved å krysse et punkt på motsatt side, vil de kunne si at båndet har en side. Dette oppdager de imidlertid at ikke er tilfellet, da de aldri kommer til punktet på motsatt side. Ved å analysere denne delen har vi identifisert de fire komponentene *forståelse, resonnement, anvendelse og engasjement* i flere av utsagnene til elevene. Da alle komponentene ble identifisert i utsagn 13, valgte vi å ta utgangspunkt i dette utsagnet for å vise hvordan vi har identifisert dem.

I utsagn 13 viser Astrid **Forståelse**. For å bestemme hvor mange sider møbiusbåndet hadde, tok hun i bruk den samme fremgangsmåten som de brukte i en tidligere del av oppgaven: «*Vent da, da må vi bare gjøre det deres trikset da. B ... Vent da nei, jeg kan starte på A da. Ja. A ... Jeg bare gjør sånn ... Tegner en firkant og en trekant.*» Astrid foreslår at hun kan tegne en

trekant på den ene siden av båndet og en firkant på den andre. Hvis hun klarer å tegne en strek som går fra trekanten til firkanten, og så tilbake til trekanten, så vil det bety at båndet kun har en side. Dette viser at hun kan se sammenhenger mellom ulike konsepter og ideer, samt anvende kunnskapen sin i ulike kontekster. Utsagnet viser også at hun kan forklare og begrunne valget av strategi. Komponenten **resonnement** er identifisert ved å se på hvordan elevene forklarer, argumenterer, tenker og reflekterer rundt arbeidet sitt. I dette utsagnet viser Astrid at hun tenker logisk og systematisk, samtidig som hun forklarer prosessen. **Engasjement** kommer til syne ved at Astrid uttrykker sin tillit til egne matematiske evner, og viser at hun har tro på at hun kan få til oppgaven ved å si «*Vent da, da må vi bare gjøre det dere trikset da.*». Til slutt har vi også identifisert **Anvendelse** i dette utsagnet. Anvendelse kommer tydelig frem når Astrid oppdager at hun kan bruke en strategi som de har brukt tidligere i oppgaven for å finne ut hvor mange sider den nye figuren har: «*Jeg bare gjør sånn ... Tegner en firkant og en trekant.*». Her viser Astrid at hun kan velge mellom å bruke ulike strategier for å løse problemet på en hensiktsmessig måte, samt tilpasse seg nye problemer og situasjoner.

- 22) Mille: *Kanskje det er hvor ... kanskje det er hvor mange twister sånn at vi bare blir tvista tilbake.*
- 23) Astrid: *Å! Det er to tvister, ikke sant. For da er vi jo.. Vent da.. Det blir bare sånn..*
[viser med sylindere, at selv om man twister den rundt har den fortsatt to sider]
- 24) Mille: *Så vi blir tvista fram og så tilbake.*
- 25) Astrid: *Se! Fordi, en, to.* [viser med sylindere igjen]
- 26) Mille: *Ja!, de blir jo bare tvista sånn under der.* [peker på sylindere til Astrid]
- 27) Astrid: *De blir jo bare tvista sånn.* [viser til Elsa]
- 28) Elsa: *Mhm.*
- 29) Mille: *Mens her har vi liksom en tvist, så vi blir bare hoppa til den andre siden* [snakker om møbiusbåndet]
- 30) Astrid: *Den bare.. Den, nei!.. Vi, den twister.. Men den twister tilbake igjen.*
- 31) Mille: *også twister tilbake. Ja.*
- 32) Elsa: *Men det er to tvister.*
- 33) Astrid: *JA, for da vrir den jo tilbake.. Hvis du vrir noe to ganger, så kommer den jo..*
[vrir hånden sin rundt].. *Bare på samme stedet hvor man starta.*
- 34) Mille: *Ja, den bare..* [vrir hånden sin]
- 35) Astrid: *Så da blir det to. To sider.*

36) Mille: *To sider.*

37) Astrid: *To sider.*

I denne siste sekvensen av samtaleutdraget kommer elevene frem til en forståelse av hvor mange sider figur-alfa har. De samler tråden fra tidligere i samtalen sin og begrunner hvordan de mener at tvistene til figuren er utslagsgivende for at figur-alfa har to og ikke én side. Vi har identifisert alle de fem komponentene i dette utdraget.

Forståelse er den komponenten som er registrert flest ganger i denne delen. Den er fremtredende her, fordi jentene viser en forståelse av hvor mange sider figuren har og hvilke faktorer som er avgjørende for at figuren får to sider. Basert på observasjonene kan vi identifisere forståelse ved at elevene bygger en felles forståelse av problemet, stiller spørsmål, og diskuterer ideene sine for å klargjøre og utvide forståelsen sin. De trekker også paralleller til tidligere kunnskap og erfaringer for å løse problemet. Et eksempel på dette finner vi i utsagn 32-35, der Elsa, Mille og Astrid konkluderer med at to tvister fører til to sider: *«Men det er to tvister.»* - *«JA, for da vrir den jo tilbake.. Hvis du vrir noe to ganger, så kommer den jo.. [vrir hånden sin rundt].. Bare på samme stedet hvor man starta.»* - *«Så da blir det to. To sider.»*

Resonnement er identifisert i mange av de samme utsagnene som forståelse, og kommer frem ved at elevene bruker logikk og argumentasjon for å forstå hvordan tvistene til figur-alfa påvirker antall sider. Vi har også sett på hvordan de bruker analogier og visuelle hjelpemidler for å styrke argumentasjonen sin. Det første ser vi et eksempel på i utsagn 22, når Mille introduserer ideen om at antall tvister kan være relatert til båndets sider: *«Kanskje det er hvor mange tvister sånn at vi bare blir tvista tilbake.»* Videre kommer resonnement til syne i utsagn 23 og 26 når Astrid og Mille bruker en sylinder for å demonstrere og argumentere for funksjonen til tvistene: *«Det blir bare sånn.. [viser med sylindren, at selv om man tvister den rundt har den fortsatt to sider]»* - *«Ja!, de blir jo bare tvista sånn under der. [peker på sylindren til Astrid]».*

I denne sekvensen diskuterer jentene aktivt, kommer med forslag og samarbeider om å finne en løsning på problemet. Dette tolker vi som at de er interesserte og involverte i samtalen, samt arbeider sammen mot et felles mål. Et tydelig tegn på **engasjement** er når Astrid i utsagn 23 utbryter: *«Å! Det er to tvister, ikke sant.»*, etterfulgt av at hun i utsagn 25 tar opp en sylinder

for å forklare hvilke implikasjoner dette vil ha for antall sider figuren får: «*Se! Fordi, en, to. [viser med sylindere igjen]*»

Vi har videre identifisert **Anvendelse** der elevene oppdager at antall tvister er avgjørende for å bestemme hvor mange sider figur-alfa får. Dette kan vi se i utsagn 23, der Astrid buker en sylinder (som har to sider) for å vise at selv om hun tvister den, så har den fortsatt to sider. Her anvender hun sylindere som hjelpemiddel til å argumentere. I utsagn 25 anvender hun telling som metode ved å telle antall tvister figur-alfa har: «*Se! Fordi, en, to. [viser med sylindere igjen]*». Dette er også det eneste stedet i samtaleutdraget hvor vi har identifisert **Beregning**. Ved å telle viser hun at hun er i stand til å velge å bruke en matematisk prosedyre for å finne svaret. Beregning er identifisert svært få ganger i den oppgaven.

4.2.2. Gruppe 1 møbiusbåndoppgave

Kult! Vent da! Se her a boys!

Dette utdrag er hentet fra gruppe 1 sitt arbeid med møbiusbåndoppgaven. Gruppen består av tre elever som har fått de fiktive navnene Ole, Bjørn og Jan. Ved utdragets begynnelse har elevene arbeidet med Møbiusbåndoppgaven i 39 minutter, og de har tidligere gjort seg ferdig med oppgaven som elevene i det forrige samtaleutdraget arbeidet med. De har frem til samtaleutdraget starter, diskutert hvordan den nye figuren kommer til å se ut, samt antall tvister, ytterkanter og sideflater figuren vil få når de klipper et møbiusbånd 1 centimeter fra kanten og rundt. Denne nye figuren vil heretter refereres til som figur-beta.



Figur 15: Bilde av et møbiusbånd før det ble klippet.



Figur 16: Bilde av den nye figuren (figur-beta).

Figur 15 og 16 illustrerer et møbiusbånd og figur-beta som oppsto etter at elevene klippet 1 centimeter fra kanten og rundt. I forkant av klippingen skulle de lage en hypotese for hva de trodde ville skje som følge av klippingen. De diskuterte ulike muligheter og trodde de ville ende opp med en figur som lignet det opprinnelige møbiusbåndet, men med flere «tvister». Samtaleutdraget er valgt ut for å vise en annen del av møbiusbåndoppgaven, samt hvordan elevene arbeider utforskende med en taktil læringsaktivitet. Utdraget starter når elevene nærmer seg ferdig med klippingen og skal svare på følgende spørsmål:

Klipp båndet.

Hva skjedde? Hvilke(n) figurer fikk dere? Hvor mange tvister har de(n)? Hvor mange sideflater har de(n)? Diskuter og skriv ned.

- 1) *Bjørn: vent da... Er den meningen at jeg skal klippe av den her?*
- 2) *Ole: Ja, klipp den av. De går inni hverandre.*
- 3) *[Bjørn klipper gjennom båndet]*

- 4) *Bjørn: Kult! Vent da! Se her a boys! Se, det er den samme formen! [Figuren Bjørn snakker om har form som et møbiusbånd].*
- 5) *[Bjørn viser frem figuren til de andre]*
- 6) *Ole: Det her er jo formen vi klippa [Viser frem et møbiusbånd, som er figuren de startet med]. Også ble det en av de her, inni her!*
- 7) *Bjørn: Den formen [møbiusbånd] er der og den vi har klippa ista, er her.*
- 8) *Ole: Så de to formene sitter fast sammen. Definitivt flere tvister nå da! Så vi hadde på en måte halvveis riktig.*
- 9) *Jan/Ole: [Ler] Ja, men bare halvveis.*
- 10) *[Bjørn studerer den nye figuren]*
- 11) *Bjørn: Vi kan jo prøve å telle da.. 1,2,3.. Fortsatt 3 tvister her.*
- 12) *Ole: ja. 4 til sammen med møbiusbåndet.*
- 13) *Bjørn: Ja, 4 tvister med den [peker på det lille møbiusbåndet som henger fast i den større remsen]. Hvor mange tvister fikk du Jan?*
- 14) *Ole: Bare legg den ned.*
- 15) *[Alle ser på figurene til Jan]*
- 16) *Jan: Jeg tror det er 4 til sammen.*
- 17) *Bjørn: Da tenkte vi jo riktig da! Vi var bare ikke klar over at denne figuren også skulle komme frem og at figurene skulle sitte fast.*

I utdraget eksperimenterer Bjørn, Ole og Jan med å klippe et møbiusbånd 1 cm fra kanten til de møter punktet de startet i. De oppdager at det dannes to figurer når de klipper båndet - ett nytt smalt bånd med flere tvister og ett møbiusbånd. Båndene sitter imidlertid fast i hverandre. De sammenligner resultatene og teller tvistene til figurene som oppsto. Selv om de hadde noen ideer om hva som skulle skje, var de ikke helt klar over hvordan figurene kom til å se ut etter klippingen. De ble overrasket over at figur-beta oppstod.

I denne delen av samtaleutdraget har vi identifisert alle de fem komponentene av matematisk kompetanse: *forståelse, beregning, anvendelse, resonnement og engasjement*. **Forståelse** kommer blant annet til uttrykk i utsagn 4 ved at Bjørn sier: «*Se, det er den samme formen! [Figuren Bjørn snakker om har form som et møbiusbånd]*». Dette viser forståelse ved at eleven ser sammenhengen mellom møbiusbåndet og figur-beta. Den samme forståelsen viser Ole i utsagn 6 når han sier: «*Det her er jo formen vi klippa [Viser frem et møbiusbånd, som er figuren de startet med]. Også ble det en av de her, inni her!*».

Möbiusbånd er en interessant matematisk figur, men krever få **beregninger**. Vi har likevel identifisert to tilfeller av beregning. Beregning kommer til uttrykk i utsagn 11 ved at Bjørn teller antall tvister: «*Vi kan jo prøve å telle da.. 1,2,3.. Fortsatt 3 tvister her.*». Dette viser at han er i stand til å utføre enkle beregninger som å addere antall tvister. Det samme viser Ole i utsagn 12, hvor han addere twistene i figur-beta for å få 4: «*4 til sammen med møbiusbåndet.*» Vi har identifisert **anvendelse** i de samme utsagnene ved at elevene viser at de kan anvende hensiktsmessige metoder for å løse problemet.

Resonnement kommer til syne i flere av utsagnene til elevene ved at de bruker logikk og argumentasjon for å forklare figur-beta samt hvor mange tvister den har. Et eksempel er utsagn 11, hvor Bjørn sier: «*Vi kan jo prøve å telle da.. 1,2,3.. Fortsatt 3 tvister her.*» Her tenker Bjørn logisk rundt problemet, og argumenterer for at de kan telle antall tvister i figur-beta.

Engasjement ble identifisert i utdraget ved å se på elevenes verbale og ikke-verbale uttrykk. Elevene viser nysgjerrighet og interesse når de reagerer med overraskelse og forvirring rundt den nye figuren som oppsto. Et tydelig eksempel på dette finner vi i utsagn 4, hvor Bjørn sier: «*Kult! Vent da! Se her a boys! Se, det er den samme formen!*». Dette tolker vi som at Bjørn blir overasket over at møbiusbåndet oppsto som en del av figur-beta, og det kan være et tegn på engasjement.

4.2.3. Gruppe 1 sylinderoppgave

Å! JA! Vi kan bruke ris!

Dette utdraget er hentet fra Ole, Bjørn og Jan sitt arbeid med den første delen av sylinderoppgaven. Elevene er på dette tidspunktet 17 minutter inn i arbeidet med oppgaven. De har tidligere fått utdelt to A4-ark hver, som de har fått i oppgave å lage to sylindere av. Den ene sylindere skal foldes over kortsiden, og den andre over langsiden. Elevene samarbeidet om å holde og teipe arkene sammen.

Oppgaven ber deretter elevene om å diskutere om sylindrene rommer like mye eller om volumet er ulikt. De skal lage og skrive ned en hypotese som begrunner tankene sine. Ole, Bjørn og Jan diskuterer at arealet av arkene er like store, og om dette kan ha noe å si for volumet til sylindrene. Ole og Bjørn tror volumet blir like stort, da arkene har likt areal. Jan er imidlertid usikker på om volumet er likt. En av elevene prøver å få Jan til å forklare hvorfor han tror arealet er ulikt, men Jan sier at han ikke vet hvorfor. Gruppen blir til slutt enige om at de tror sylindrene rommer like mye, selv om Jan fortsatt uttrykker usikkerhet. Gruppen går deretter videre til oppgave 2:

Rommer sylindrene like mye eller er volumene til sylindrene ulikt?

Løs oppgaven på to eller flere måter. På bordet ligger det hjelpemidler dere kan bruke.

Her oppdager Ole en strategi for å finne volumet til sylindrene. Han sier «Å! JA! Vi kan bruke ris!». Dette resonnementet fører til at elevene begynner å fylle sylindrene med ris, for deretter å måle mengden. Dette utdraget er valgt for å illustrere hvordan elevene samarbeider og benytter seg av en takt til tilnærming til å løse oppgaven. Utdraget starter når elevene begynner å fylle sylindren med ris:

- 1) Bjørn: Vi må telle da... En kopp. Det var en kopp. (fyller den brede sylindren med ris)
- 2) Ole: Det var ikke en hel en, så vi kommer ikke til å vite hvor mye ris det er.
- 3) Bjørn: Ja, men vi må telle, hvis ikke så vet vi ikke om de rommer like mye.
- 4) Bjørn: [Går til bordet med hjelpemidler] Vi burde bruke disse da boys! [litermål] Vi burde bruke denne.
- 5) Ole: jammen vi får ikke hele den oppi risposen da. Vent da, så skal jeg prøve.
[Bruker koppen til å fylle litermålet med ris]
- 6) Bjørn: vi må helle den risen oppi også da [Risen de allerede har fylt i sylindren med kopp], så vi vet hvor mye ris som er fylt.
- 7) [De heller risen som allerede er fylt i sylindren, oppi litermålet.]
- 8) Bjørn: Jeg kommer sikkert til å søle. [tar over fylling av ris] oi, sjekk her a. Jeg fikk det til jo! [fyller litt til]. Skal vi helle det over i sylindren da? Men vi må sjekke hvor mye vi har først [Hvor mye ris de har i litermålet, før de heller risen i sylindren].

I utdraget ser vi at elevene samarbeider med å måle mengden ris som trengs for å fylle en sylinder. De bruker først kopper og deretter litermål. De diskuterer bruken av kopper for å måle

risen, men bestemmer seg for å anvende et litermål for å oppnå en mer presis måling. Elevene prøver å finne en effektiv og nøyaktig metode for å måle mengden ris slik at de kan bestemme volumet av sylindren.

Vi har identifisert **forståelse** ved flere tilfeller i denne delen av utdraget, blant annet i utsagn 1 og 3 der Bjørn sier: «*Vi må telle da... En kopp. Det var en kopp*» - «*Ja, men vi må telle, hvis ikke så vet vi ikke om de rommer like mye.*» Dette viser at Bjørn har en forståelse for volumbegrepet, og dermed også en forståelse for hvordan elevene kan finne ut av hvor mye sylindrene rommer samt hvilken som rommer mest. Han foreslår å gjøre dette ved å telle antall kopper ris de får plass til i sylindrene. I de samme utsagnene har vi også identifisert **beregning** og **anvendelse**. Beregning kommer til syne ved at Bjørn teller kopper: «*...En kopp. Det var en kopp*». Utsagnet viser at han er i stand til å utføre enkle beregninger ved å legge sammen kopper for å finne ut volumet til sylindrene. Det viser også anvendelse ved at han er i stand til å velge og benytte en hensiktsmessig metode for å finne ut av hvilken sylinder som rommer mest.

Resonnement kommer til syne i samtaleutdraget ved at elevene argumenterer for strategiene sine og samarbeider for å drive problemløsningen videre. Et eksempel på dette er utsagn 6, hvor Bjørn argumenterer for at de må legge til den risen de allerede har fylt i sylindren for å finne volumet: «*Vi må helle den risen oppi også da [Risen de allerede har fylt i sylindren med kopp], så vi vet hvor mye ris som er fylt.*» Dette viser at han kan resonnerer rundt løsningsprosessen for å sikre at de får et korrekt svar.

Ved å se på hvordan elevene tar en aktiv rolle i løsningsprosessen samt viser en vilje til å forstå og løse problemet, har vi også identifisert **engasjement** i to av utsagnene. Vi identifiserte først engasjement i utsagn 4, hvor det fremgår: «*[Går til bordet med hjelpemidler] Vi burde bruke disse da boys! [littermål] Vi burde bruke denne.*» Her tar Bjørn en aktiv rolle i å løse problemet ved å forsøke å finne en alternativ måte for å måle volumet til sylindrene. Måten han formidler dette til de andre elevene og aktivt bidrar til å løse problemet, tolker vi som engasjement. Videre identifiserte vi engasjement i utsagn 8, hvor Bjørn tok ansvaret for å fylle ris samt uttrykte glede ved å få det til: «*[tar over fylling av ris] oi, sjekk her a. Jeg fikk det til jo!*».

For å måle volumet, har elevene frem til nå fylt en sylinder med ris ved hjelp av en kopp og et litermål. Bjørn foreslo at de kunne telle kopper for å måle volumet, men Ole var usikker på om kopper var nøyaktig nok. Elevene tømte derfor risen de allerede hadde fylt i sylindren oppi

litemålet og fant ut at de hadde omtrent 8 dl ris. Utdraget nedenfor fortsetter deretter med at elevene begynte å helle risen tilbake i sylindren, men oppdaget at de fortsatt manglet ris. Elevene fylte litemålet på nytt for å fylle sylindren ytterligere. Vi vil påpeke at elevene her har valgt en tungvinn måte for å fylle sylindren med ris. Vi har derfor forsøkt å gi en forklaring av handlingene deres. Dialogen fortsetter som følger:

- 9) Ole: *[Leser av litemålet] 8 dl ca.*
- 10) Ole: *[Heller risen i litemålet over i sylindren] Oi, det var ikke nok... Vi kom litt mer en halvveis.*
- 11) *[Fyller litemålet med ris igjen]*
- 12) Bjørn: *8 dl var cirka halvparten. Så kanskje 8 dl til?*
- 13) Jan: *Nei mindre? Kanskje 6?*
- 14) Ole: *Ja, vi har 7dl nå.*
- 15) Bjørn: *Ja, så bare heller vi det oppi her. [Ole begynner å helle risen over i sylindren]*
- 16) Bjørn: *Hvis det blir for mye, så må vi sjekke hvor mye ris vi har igjen i litemålet.*
- 17) *[Ole fyller ris til toppen av sylindren og søler litt.]*
- 18) Bjørn: *Ahh.. Nå vet vi ikke nøyaktig hvor mye som var igjen.*
- 19) Ole: *Det går bra. Det hadde uansett blitt igjen ca. 1 dl [Det ble igjen 1 dl i litemålet]. Vi hadde 8.. 14 da.*
- 20) Bjørn: *14?*
- 21) Ole: *Ja, $8 + 6$*
- 22) Bjørn: *Åja, ja sant.*

Utdraget viser at Ole, Bjørn og Jan måler mengden ris som fyller en sylinder. De heller først 8 dl ris i sylindren, og diskuterer hvor mye mer ris det er plass til. De prøver å helle ytterligere 7 dl ris i sylindren. Sylindren er full når elevene har ca. 1 dl igjen i litemålet og beregner at sylindren rommer 14 dl ris totalt. I denne delen av samtaleutdraget, har vi identifisert alle komponentene med unntak av engasjement.

Vi har identifisert **forståelse** ved at elevene finner en metode for å måle volumet til sylindrene samt klarer å utføre den. Et eksempel på dette er utsagn 19, hvor Ole forstår at de må legge sammen ris fra sylindren og litemålet, og deretter trekke fra ris som ble igjen i litemålet etter at de hadde fylt sylindren helt full: «*Det hadde uansett blitt igjen ca. 1 dl [Det ble igjen 1 dl i litemålet]. Vi hadde 8.. 14 da.*»

Beregning er identifisert ved flere tilfeller, og kommer til uttrykk ved at elevene gjør utregninger samt bruker verktøy for å løse problemet. Et eksempel på dette er utsagn 10, hvor Ole bruker et litermål som verktøy for å utføre beregningene sine. Et annet eksempel er utsagn 21, hvor Ole, for å finne ut hvor mye sylindere rommet, adderer mengden ris som var i sylindere med ris som var i litermålet: «Ja, $8 + 6$.». **Anvendelse** kommer til uttrykk i mange av de samme utsagnene som beregning, fordi elevene her viser at de kan anvende redskaper og metoder for å løse problemene. For eksempel anvender Ole addisjon som metode i utsagn 21 for å finne svaret: «Ja, $8 + 6$.».

Resonnement er fremtredende i denne delen av utdraget fordi elevene diskuterer seg frem til en felles forståelse for hvordan de skal løse problemet. Dette ser vi for eksempel i utsagn 12 og 13, der Bjørn og Jan diskuterer om sylindere mangler 6 eller 8 dl for å bli full: «8 dl var cirka halvparten. Så kanskje 8 dl til?» - «Nei mindre? Kanskje 6». Her diskuterer de løsningen med hverandre, og viser at de er i stand til samarbeide for å finne svaret.

- 23) *Student: Kunne man målt risen på en annen måte?*
- 24) *Ole: Hmm.. hvis man hadde gjort om dl til kilo... [snakker lavt, som om han tenker høyt] «går til hjelpemidlene». Hva blir 14 dl i kilo igjen Jan?*
- 25) *Jan: Det kommer an på hva man måler. Vann veier en kilo per liter, jeg vet ikke hva ris veier.*
- 26) *Ole: Åja*
- 27) *Ole: hmm. Vi kunne jo helt risen tilbake i litermålet og målt på den måten.*
- 28) *[De tester ut denne måten å måle risen på. De bruker to litermål.]*
- 29) *Bjørn: Der ja. [Elevene fyller først et fullt litermål før de begynner å fylle det andre.]*
- 30) *Bjørn: Vi har sånn cirka. en liter der.*
- 31) *Ole: Ja, litt over en liter. Også 3 dl*
- 32) *Bjørn: 1 liter pluss 3 dl er 13 dl det.*
- 33) *Ole: ja, cirka 13 dl.*
- 34) *Ole: [Setter den smale sylindere ved siden av den brede sylindere.] Nå føler jeg at den her [den brede sylindere], rommer mye mer.*
- 35) *Bjørn: Ja, men det er fortsatt like mye. Tro meg. Jeg vet hva jeg snakker om.*

I den siste delen av samtaleutdraget blir elevene spurt om de kan måle risen på en annen måte. Ole foreslår at de kan konvertere desiliter til kilo, men Jan påpeker at dette kommer an på massetettheten til det man måler og han bruker vann som eksempel. De bestemmer seg derfor for å måle risen ved å helle risen tilbake fra sylindere til litermålet. De får cirka 13 dl ris i målingene sine. Til slutt kommenterer Ole at det kan se ut som den brede sylindere har et større volum enn den smale, men Bjørn insisterer på at de rommer like mye. Her har vi identifisert alle de fem komponentene av matematisk kompetanse.

Forståelse er identifisert ved flere tilfeller i den siste delen av utdraget. Det kommer blant annet til syne i utsagn 27 ved at Ole sier: «*Vi kunne jo helt risen tilbake i litermålet og målt på den måten.*». Dette viser at Ole forstår hvordan han kan bruke de tilgjengelige verktøyene for å løse oppgaven på en enklere måte, samt at han kan formidle dette til de andre elevene.

I denne delen av utdraget er **beregning** kun identifisert i ett tilfelle, herunder i utsagn 32 hvor Bjørn sier: «*1 liter pluss 3 dl er 13 dl det.*». Dette viser at Bjørn er i stand til å utføre en matematisk utregning på en effektivt og korrekt måte ved å addere 1 liter med 3 desiliter. **Anvendelse** ble identifisert ved flere tilfeller, blant annet i utsagn 32. Bjørn viser her at han er i stand til å velge en hensiktsmessig metode for å legge sammen målene, og kan konvertere mellom liter og desiliter for å få korrekt svar.

Videre identifiserte vi også **resonnement** i flere tilfeller. Et eksempel er utsagn 24, der Ole sier: «*Hmm... hvis man hadde gjort om dl til kilo... Hva blir 14 dl i kilo igjen, Jan?*». Utsagnet viser to aspekter av resonnement. For det første foreslår Ole at de kan måle risen i kilo. Dette viser kreativitet og en mulig strategi for å løse oppgaven. For det andre inkluderer han Jan i samtalen ved å spørre om hva 14 dl tilsvarer i kilo. Dette er resonnement fordi det bidrar til å føre diskusjonen videre.

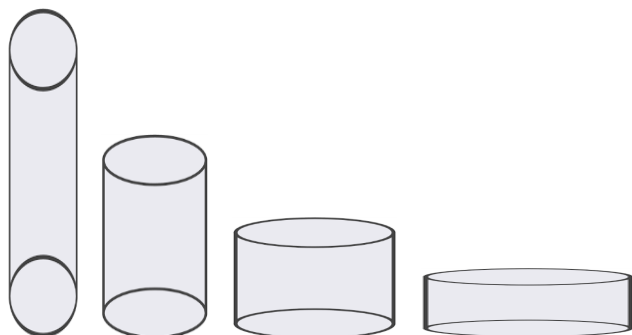
Vi fant også flere tilfeller av **engasjement**. Eksempler på dette finner vi i utsagn 24 og 27, hvor Ole bidrar med nye strategier for å løse oppgaven. Gjennom dette viser han en vilje til å forstå og utforske problemet, samt en tro på at han kan få det til.

4.2.4. Gruppe 2 sylinderoppgave

Så Volumet kan jo bli uendelig stort.

Elsa, Astrid og Mille har nå fullført oppgave 1, og er godt i gang med oppgave 2 som dreier seg om volumet til sylindere. Samtaleutdraget nedenfor er hentet fra den siste delen av oppgave 2, og er trukket frem for å vise hvordan elevene utforsker volumet til en sylinder på en taktil måte. Elevene har frem til nå jobbet med sylinderoppgaven i omkring 35 minutter. Dette innebærer at de er ferdig med oppgaven som ble presentert i forrige samtaleutdrag. Tidligere i oppgaven har de sammenliknet volumet til to sylindene laget av to identiske A4 ark. I tillegg har de beregnet volumene til sylindene ved hjelp av to ulike metoder (matematisk og ved å fylle de med ris), og for å avgjøre hvilken sylinder som rommer mest, har de sammenliknet svarene. Forut for samtaleutdraget, hadde elevene påbegynt arbeidet med dette spørsmålet:

Oppgave 4.



Figur 17: Illustrasjon fra sylinderoppgaven. Vedlegg 2.

Kan du bruke det samme A4-arket til å lage en sylinder med større volum? Hvor stort kan volumet bli?

Elevene har kommet frem til at de kan dele A4-arket i to på langs, og deretter teipe endene sammen for å lage en lenger remse. Denne remsen har de videre teipet sammen til en ny sylinder. Deretter diskuterte de hvordan de skulle måle at volumet faktisk ble større. De sto mellom å regne det ut matematisk eller fylle sylinderen med ris for så å måle med litermål. De endte til slutt opp med å regne det ut matematisk. Hvordan jentene har regnet ut volumet, samt svart på den siste delen av spørsmålet kommer frem i utdraget nedenfor.

- 1) Astrid: Oki. Høyden er.. Oki Elsa, skriver du?
- 2) Elsa: Ja. Hvor mye?
- 3) Astrid: Høyden er 10 ca. [måler]
- 4) Elsa: Radius?
- 5) Astrid: 19! [måler] 19 delt på 2.
- 6) Elsa: 9,5. Og så er det ganger pi.
- 7) Astrid: Ganger pi ... 3,14 ... Ganger ... 9,5 i andre ikkesant?
- 8) Elsa: Ja.
- 9) Astrid: 9,5 ganger 9,5. Ganger høyden. Hva var høyden igjen?
- 10) Elsa: 10.
- 11) Astrid: Ganger 10.
- 12) Astrid: Totusen og ... [skriver inn på kalkulator] ja, også bare deler jeg det på 1000.
- 13) Astrid: Den ble 2,83. Så 2,8.
- 14) Mille: Da rommer den mer da.
- 15) Astrid: Den ble mye mer. Den var faktisk det dobbelte av den der! [Holder opp sylindere de startet med før de klippet]. Fordi den klippet vi i to! [Holder opp begge]
- 16) Mille: Ooo.
- 17) Elsa: Ahhh.
- 18) Astrid: Ja.

Denne delen av utdraget viser hvordan elevene etterprøver om volumet av sylindere de lagde, ble større enn sylindere de hadde fra før. De gjør dette ved å måle høyde og radius samt at de bruker en formel for å bestemme sylinderens volum. De oppdager at sylindere har blitt dobbelt så stort som den opprinnelige sylindere.

I samtaleutdraget ovenfor, identifiserte vi alle de fem komponentene av matematisk kompetanse. **Forståelse** kommer blant annet til syne i utsagn 14 og 15 når Mille og Astrid kommenterer at volumet av den nye sylindere er større enn den opprinnelige: «Da rommer den mer da.» og «Den ble mye mer. Den var faktisk det dobbelte av den der! [Holder opp sylindere de startet med før de klippet]. Fordi den klippet vi i to! [Holder opp begge].» Dette viser at de klarer å reflektere over resultatet av beregningene sine, og viser en forståelse av sammenhengen mellom beregningene de gjør og dimensjonene på de to sylindere. Videre har vi identifisert **resonnering** ved å se på måten elevene arbeider sammen, stiller spørsmål og trekker

konklusjoner basert på informasjonen de har samlet. Et eksempel på dette er når Astrid og Elsa arbeider sammen for å regne ut volumet av en sylinder ved å diskutere og anvende relevante geometriske konsepter. I utsagn 3 og 5 kommer Astrid frem til høyden og diameteren til sylindren, og Elsa responderer i utsagn 6 med å fortelle hva radiusen er før hun informerer om neste trinn i utregningen: «9,5. Og så er det ganger pi.» Dette viser oss at elevene kan samarbeide og dele relevant informasjon for å utføre beregningene.

Vi identifiserte også **engasjement** i dette utdraget. Det har vi gjort ved å se på hvordan elevene aktivt deltar i samtalen, stiller spørsmål, deler ideer og støtter hverandre i løpet av diskusjonen. I utsagn 15 viser Astrid engasjement ved å entusiastisk dele funnene sine med Mille og Elsa. Astrid sier: «Den ble mye mer. Den var faktisk det dobbelte av den der! [Holder opp sylindren de startet med før de klippet]. Fordi den klypte vi i to! [Holder opp begge].» Hennes bruk av bevegelser og konkret visuell støtte ved å holde opp begge sylindrene, tolker vi som at hun er engasjert og ønsker å formidle tankene sine til de andre elevene. Hun uttrykker også en tro på at hun forstår problemet.

Anvendelse kommer til uttrykk i flere av utsagnene ved at elevene bruker matematiske formler, begreper og redskaper for å beregne volumet til sylindren. I utsagn 9 og 11 viser Astrid at hun forstår og kan bruke fremgangsmåten for å regne ut volumet til sylindren ved å si: «9,5 ganger 9,5. Ganger høyden. Hva var høyden igjen?» og «Ganger 10.» Dette viser at hun er i stand til å anvende formlene og konseptene på en sammenhengende og systematisk måte for å finne volumet av sylindren. Til slutt viser Astrid i utsagn 12 at hun kan bruke kalkulator for å finne det endelige svaret: «Totusen og [skriver inn på kalkulator] ... ja, også bare deler jeg det på 1000.» På den måten viser hun også at hun kan konvertere svaret til liter for å bekrefte at volumet til den nye sylindren ble større. **Beregning** er i stor grad identifisert i de samme utsagnene som anvendelse. Komponenten er identifisert gjennom at elevene systematisk utfører matematiske operasjoner for å finne volumet til sylindren, samt bruker formler og konsepter for å utføre beregninger. I utsagn 6, 7, 9, 11 og 12 viser Astrid og Elsa at de forstår geometriske konsepter, og at de kan utføre enkle beregninger som å dividere diameteren på to, multiplisere radiusen med seg selv og dele svaret på 1000 for å få korrekt svar. I utsagn 12 viser Astrid at hun også kan bruke teknologi, herunder kalkulator, for å utføre matematiske operasjoner og presentere resultatet på en hensiktsmessig måte.

19) Astrid: Hvor stort kan volumet bli?

- 20) Astrid: *Volumet kan jo bli dritstort, Det er jo bare å klippe opp i masse småbiter og lime alle sammen så kan man få kjempestort volum. [Viser med hendene at omkretsen blir enorm.]*
- 21) Elsa: *Ja.*
- 22) Mille: *Ja, det kan man.*
- 23) Student: *Hvorfor kan man det? Hva er det som har noe å si for hvor stort volumet blir?*
- 24) Mille: *Radiusen blir større.*
- 25) Astrid: *Det sier seg selv, hvis du har en høy liten ting, og du klipper den i masse småbiter, så kan jo den bli lang nok til å dekke hele planeten. Etter hvert. Så Volumet kan jo bli uendelig stort.*
- 26) Mille: *Ja.*
- 27) Elsa: *Ja.*
- 28) Student: *Kan du utdype det siste?*
- 29) Astrid: *For eksempel. Hvor er den [finner frem sylindrene] ... Den her radiusen er dobbelt av den. [Viser med de to sylindrene.] Fordi vi klippet den her i to. Og limte de sammen så de ble større [snakker om den første sylindren de startet med]. Og hvis man gjør det samme med den her [den nye sylindren]. Så.. Kan man også lime de sammen, og da blir det dobbelt av det igjen. Også videre og videre.*
- 30) Student: *Hvorfor har radiusen mer å si enn høyden? Fordi den blir jo lavere også.*
- 31) Astrid: *Fordi man ganger radiusen med seg selv. Så da blir det automatisk større enn høyden.*

Samtaleutdraget ovenfor viser det avsluttende arbeidet til jentene, hvor de forsøker å svare på det siste spørsmålet i oppgaven: *Hvor stort kan volumet bli?* Utdraget er trukket frem for å vise hvordan jentene utvider sin forståelse av hvilke egenskaper som er avgjørende for volumet til sylindren. I denne delen av samtalen har vi identifisert alle komponentene med unntak av beregning.

Forståelse kommer tydelig frem i dette utdraget. Det er i størst grad Astrid som bidrar til å formidle denne forståelsen. Milles og Elsas forståelse kan likevel identifiseres gjennom bekreftende utsagn. I utsagn 20 kommer Astrid med et forslag til en metode for å gjøre volumet større. Hun foreslår at de kan øke volumet til sylindren ved å dele den nye sylindren i flere lange remser, som de deretter kan teipe sammen for å lage en lavere, men bredere sylinder: «*Volumet kan jo bli dritstort, Det er jo bare å klippe opp i masse småbiter og lime alle sammen*

så kan man få kjempestort volum. [Viser med hendene at omkretsen blir enorm.]» Dette viser at Astrid forstår hvilke aspekter ved sylindren som er viktig for at volumet skal bli større. Hun kobler også dette til tidligere kunnskap. Elsa og Mille viser forståelse i utsagn 21 og 22 ved å bekrefte Astrids forslag.

Resonnement er identifisert ved å observere hvordan elevene utveksler ideer, stiller spørsmål og bygger på hverandres forklaringer når de utforsker hvor stort volumet kan bli. Vi ser i utsagn 20 at Astrid kommer med et forslag til hvordan man kan gjøre volumet til sylindren større ved å klippe den i strimler og teipe bitene sammen. Her bruker hun sin forståelse av sylindrens egenskaper for å forklare ovenfor de andre jentene hvordan oppgaven kan løses. I forklaringen under utsagn 25, tar hun videre hensyn til andre geometriske faktorer, blant annet at radiusen dobles. I utsagn 29 utdyper hun resonnementet ved å bruke sylindrene som eksempler på hvordan volumet øker når radiusen dobles. Vi tolker det som at Astrid har god oversikt over hvilke egenskaper ved sylindren som er viktige for at volumet skal kunne bli størst mulig, samt at hun evner å formidle forståelsen på en god måte til Mille og Elsa.

Engasjement ble blant annet identifisert i utsagn 25. Ved å forklare at volumet teoretisk sett kan bli uendelig stort, utdyper Astrid ideen sin om å klippe sylindren i småbiter for å øke volumet. Dette viser engasjement og interesse for å få en dypere forståelse av konseptet. I utsagn 29 viser hun videre engasjement ved å bruke konkrete i forklaringen sin: «*[Viser med de to sylindrene.]*» Gjennom hele denne delen av samtaleutdraget viser Astrid interesse for å forstå og løse problemet, samt forklare dette til sine medelever. I sine forklaringer (utsagn 20, 25, 29 og 31) viser også Astrid at hun kan **anvende** matematiske konsepter og teknikker for å utforske å forstå forholdet mellom sylindrens dimensjoner og volum. I denne delen av samtaleutdraget har vi identifisert anvendelse ved å observere hvordan elevene, for å løse problemet, bruker sin matematiske kunnskap om volumberegning og forholdet mellom sylindrens dimensjoner. Elevene forstår at økningen av volumet i sylindren heller er avhengig av at radiusen blir større, enn at høyden økes. Dette er fordi de anerkjenner at radiusen multipliseres med seg selv i volumberegningen, mens høyden bare multipliseres én gang.

5. DISKUSJON

I kapittel 1.3. ble følgende problemstilling presentert: *Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?*

Problemstillingen har blitt undersøkt med utgangspunkt i elevenes samtaler og handlinger i arbeid med møbiusbånd og sylinderopgaven.

I dette kapitlet vil vi trekke frem noen av de sentrale funnene i analysen, samt diskutere hvorvidt funnene vi har gjort besvarer problemstillingen. Med utgangspunkt i teori og analysen, vil vi først vurdere om geometriopplegget er utforskende, deretter om opplegget er taktilt. Videre vil vi diskutere den matematiske kompetansen som er identifisert i studien, før vi til slutt vurdere studiens implikasjoner.

5.1. STUDIENS UTFORSKENDE OG TAKTILE NATUR

Det er sentralt å vurdere om geometriopplegget faktisk er utforskende og benytter taktile læringsaktiviteter. Dette er viktig for å bekrefte at studien svarer på problemstillingen. I kapittel 5.1.1. vil vi vurdere om geometriopplegget fungerte som et utforskende geometriopplegg for elevene. I kapittel 5.1.2 vil vi vurdere om geometriopplegget brukte taktile læringsaktiviteter.

5.1.1. Er geometriopplegget utforskende?

Basert på teorien og oppgavens gjennomføring, kan vi argumentere for at møbiusbåndoppgaven er utforskende. For å begrunne dette, vil vi vurdere hvordan oppgaven forholdt seg til de fem fasene i utforskingssyklusen beskrevet av Pedaste et al. (2015). Sylinderopgaven er beskrevet mindre detaljert enn møbiusbåndoppgaven. Dette er fordi vi ser at begge oppgavene følger Pedaste et al. (2015) sine fem faser av utforskingssyklusen på tilsvarende måter. Etter å ha presentert møbiusbåndoppgaven i dybden, vil vi presentere eksempler fra sylinderopgaven som viser det samme.

Orientering: I denne fasen blir elevene introdusert til et nytt tema. Fasen har som formål å vekke elevenes interesse og nysgjerrighet rundt et problem. Orienteringsfasen introduserer også viktige aspekter ved problemet (Pedaste et al., 2015, s. 54). Før elevene startet arbeidet med møbiusbåndoppgaven, ble de ved hjelp av en sylinder (se vedlegg 1) kjent med begrepene «sideflate» og «ytterkant». Sylindere er en kjent tredimensjonal geometrisk figur som har to sideflater og to ytterkanter. Sylindere ble introdusert for å hjelpe elevene med å forstå disse begrepene. Møbiusbåndet er en spesiell geometrisk figur med unike egenskaper. Den har bare én sideflate og én ytterkant. Dette er et interessant og ukjent fenomen for elevene som kan vekke interesse og nysgjerrighet. Når elevene blir introdusert for møbiusbåndet, har de allerede blitt introdusert for en sylinder. Dette forbereder elevene til å utforske og forstå møbiusbåndets egenskaper på en selvstendig måte. I sylindereoppgaven blir elevene introdusert for to sylindere laget av A4-ark, der den ene sylindere er foldet over kortsiden og den andre over langsiden. Elevene ble bedt om å lage disse sylindere for å se at de er laget av et ark med likt areal. Elevene ble deretter utfordret til å bedømme volumet av disse sylindere.

Konseptualisering: Denne fasen resulterer i at elevene utformer forskningsspørsmål, hypoteser eller begge deler (Pedaste et al., 2015, s. 54). I møbiusbåndoppgaven blir elevene bedt om å lage hypoteser for antall sideflater, ytterkanter og tvister på møbiusbåndet for hver gang de klipper. Dette krever at elevene må resonnerer og diskutere ut fra forkunnskapene sine. Vi observerer at elevenes hypoteser utvikler seg parallelt med oppgavens progresjon. Elevene resonnerer rundt hvorvidt møbiusbåndet muligens bare har én sideflate, noe som fremstår som usannsynlig for dem i begynnelsen av oppgaven. Ettersom oppgaven gir uventede utfall, oppmuntrer den til å tenke utenfor konvensjonelle rammer. Dette betyr at elevene tilpasser hypotesene sine, og indikerer at møbiusbåndoppgaven er utforskende. I sylindereoppgaven diskuterer og lager elevene hypoteser om volumene til sylindere.

Undersøkelse: Dette er fasen der nysgjerrighet gjøres om til handling for å svare på hypotesen. Fasen består av tre delfaser, herunder utforskning, eksperimentering og datafortolkning (Pedaste et al., 2015, s. 55).

Utforskning: Her prøver elevene å forstå hvordan ting henger sammen ved å lage eksperimenter (Pedaste et al., 2015, s. 55). I møbiusbåndoppgaven finner elevene strategier de kan bruke for å svare på oppgaven. Eksempler på dette er at de klipper møbiusbåndet på ulike måter, lager punkter, tegner strek eller fører fingeren rundt båndet. Noen av disse strategiene blir elevene

bedt om å bruke, men vi ser også at elevene velger å benytte seg av strategiene selvstendig. Et eksempel på dette finner vi når gruppe 2 jobber med møbiusbåndoppgaven. I utsagn 13 sier Astrid: «*Vent da, da må vi bare gjøre det deres trikset da. B ... Vent da nei, jeg kan starte på A da. Ja. A ... Hvis jeg kommer til ... Jeg bare gjør sånn ... Tegner en firkant og en trekant.*». Et annet eksempel er i sylinderoppgaven hvor elevene prøver å forstå sammenhenger ved å lage eksperimenter, som for eksempel ved å klippe i A4-arket for å gjøre volumet til sylinderen større.

Eksperimentering: I dette trinnet lager elevene en plan for eksperimentene sine, og de følger planen for å teste hypotesen (Pedaste et al., 2015, s. 55). Vi fortsetter å bruke utsagn 13 som eksempel. Her er planen til Astrid å tegne en firkant og en trekant på hver sin side av båndet. Videre bruker hun disse punktene for å bestemme om båndet har én eller to sideflater. Dette gjør hun ved å starte streken sin i firkanten, følge flaten til hun kommer til trekanten for så å tegne videre til hun ender opp i firkanten igjen. Denne fasen er også åpen for at elevene kan finne andre spørsmål de vil utforske (Pedaste et al., 2015). Dette kan vi se i utsagn 22 hvor Mille sier: *Kanskje det er hvor ... kanskje det er hvor mange tvister sånn at vi bare blir tvista tilbake.* Da starter syklusen på nytt ved at elevene først finner nye strategier som kan benyttes, og deretter bruker dem for å svare på de nye spørsmålene/hypotesene.

Tolkning av data: Etter å ha samlet data, prøver elevene å forstå hva dataene betyr og dermed lager ny kunnskap. Målet er å finne ut om hypotesen stemmer, samt trekke en konklusjon basert på spørsmålene (Pedaste et al., 2015, s. 55). Vi fortsetter å bruke gruppe 2 sitt arbeid med møbiusbåndoppgaven som eksempel. I utsagn 16 til 34 diskuterer elevene hva det betyr at de ender opp på firkanten uten å krysse trekanten på motsatt side.

Konklusjon: I denne fasen vil elevene trekke og presenterer konklusjoner, vurdere forskningsspørsmål og/eller hypoteser samt konkluderer basert på studiens resultater (Pedaste et al., 2015, s. 55). I møbiusbåndoppgaven trekker elevene slutninger basert på dataene, og de sammenligner disse med deres hypoteser og forskningsspørsmål. Dette hjelper dem med å forstå møbiusbåndets egenskaper samt hvordan de endres gjennom eksperimentering. Dette er fasen hvor elevene ser på svarene de fikk gjennom utforskingen, og vurderer disse opp mot hypotesen deres. Dette kan føre til nye innsikter. Konklusjonsfasen er en endelig konklusjon om funnene fra undersøkelsene som svarer på oppgaven. Dette kan vi se i utsagn 35, 36 og 37, hvor elevene i gruppe 2 konkluderer med at figuren har to sider. I sylinderoppgaven trekker

elevene konklusjoner om volumet til sylindrene basert på dataene sine. Dette krever resonnement og evaluering av funnene. De konkluderer med at den brede sylindren har størst volum.

Diskusjon: Diskusjonen skjer parallelt med de andre fasene, og handler om å presentere funnene i de enkelte fasene eller hele syklusen ved å kommunisere med andre (Pedaste et al., 2015, s. 55). Möbiusbåndoppgaven legger vekt på samarbeid og kommunikasjon ved å oppfordre elevene til å diskutere og forklare sine tanker og ideer underveis. Dette bidrar til refleksjon og forståelse. Resultatene viser at möbiusbåndoppgaven har mest resonnering med 318 identifiserte tilfeller, og nest mest forståelse med 228 identifiserte tilfeller. Diskusjonsfasen er også gjennomgående i hele sylindroppgaven. Spesielt når elevene skal bestemme det størst mulige volumet for en sylinder laget av et A4-ark. Resultatene viser at sylindroppgaven også har mest resonnering og nest mest forståelse. Dette antyder at oppgavene inneholder mye diskusjon.

Geometriopplegget består av to oppgaver (möbiusbånd- og sylindroppgaven). De er begge i tråd med utforskingssyklusen beskrevet av Pedaste et al. (2015). Det er nødvendig å påpeke at et opplegg i seg selv, ikke er utforskende. Likevel kan vi med bakgrunn i Pedaste et al. (2015) sin utforskingssyklus, hevde at oppleggets oppbygning og struktur kan bidra positivt for å skape et forskningsorientert miljø. Vi kan derfor konkludere med at opplegget fungerte utforskende i denne studien.

5.1.2. Bruker geometriopplegget taktile læringsaktiviteter?

Utdragene i analysen inneholder mange elementer av taktile læringsaktiviteter beskrevet av Hodge-Zickerman et al. (2020, s. 379). For det første arbeider elevene i grupper. I dette tilfellet var det to grupper med tre elever i hver. Gruppearbeid oppmuntrer til kommunikasjon og samarbeid mellom elever. For det andre fokuserer opplegget på fysiske objekter. I dette tilfellet var de fysiske objektene möbiusbånd og sylindere laget av papir. Fysiske objekter er et sentralt element i taktile læringsaktiviteter. Elevene manipulerer og utforsker objektene ved å for eksempel klippe, fylle med ris og tegne på de. For det tredje gir vi, som instruktører, veiledning

og støtte gjennom hint og målrettede spørsmål, men likevel uten å gi direkte løsninger. Dette lar elevene tenke selvstendig, samarbeide og uttrykke sine tanker høyt. Hodge-Zickerman et al. (2020) skriver at taktile aktiviteter innebærer at elevene kommuniserer, forklarer sin tenkning, tenker utenfor boksen, diskuterer og lærer konsepter på en slik måte at forståelsen av matematiske ideer utvikles uten å hindre læring av prosedyremessige ferdigheter (s. 379). Resultatene viser at møbiusbåndoppgaven inneholder svært lite beregning, noe som indikerer at oppgaven krever minimalt med prosedyremessige ferdigheter. Vi valgte derfor å inkludere sylinderopgaven hvor beregning er mer fremtredende. Analysen viser at elevene engasjerer seg i kommunikasjon, forklarer sin tenkning og utforsker matematiske konsepter. Basert på disse observasjonene konkludere vi med at geometriopplegget benyttet taktile læringsaktiviteter.

5.1.3. Oppsummering

Vi har nå diskutert og fastslått at det gjennomførte opplegget var både utforskende og benyttet taktile læringsaktiviteter. Dette gjør at problemstillingen er gyldig, da den søker å finne svar på hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter. Målet med studien er som kjent å identifisere matematisk kompetanse i elevenes arbeid. De to oppgavene ble valgt ut da vi hadde en tanke om at de kunne kompletterer hverandre. Dette er noe vi nå kan konstatere ved å se på resultatene. Fordi møbiusbåndoppgaven viser mindre beregning og sylinder oppgaven mer, gjør dette at geometriopplegget som en helhet gir mulighet for å identifisere alle komponentene.

5.3. HVILKE KOMPONENTER IDENTIFISERTE VI GJENNOM ANALYSEN?

For å identifisere elevenes matematiske kompetanse, har vi benyttet det integrerte rammeverket vi utformet tidligere (se kapittel 2.3.4.). Ved å benytte dette rammeverket har vi fått muligheten til å identifisere de ulike komponentene av den matematiske kompetansen i elevenes arbeid. I vår analyse har vi identifisert alle de fem komponentene. Figur 9 viser at resonnement er mest

fremtredende, etterfulgt av forståelse og engasjement. Vi mener dette skyldes oppgavens natur. Utforskende undervisning og taktile læringsaktiviteter fører til at elevene kommuniserer, forklarer tankegangen sin og diskuterer for å utforske konsepter (Hodge-Zickerman et al., 2020), samt mottar tilbakemeldinger, kommenterer og følger andres argumenter (Pedaste et al., 2015). Disse kjennetegnene på utforskende undervisning og taktile læringsaktiviteter viser tydelig at opplegget vårt fremmer diskusjoner. Dette ser vi i resultatene våre, der resonnering er den mest identifiserte komponenten. Det samme gjelder for forståelse, ettersom elevene gjennom diskusjoner kan forstå det som ligger bak ideer samt videreutvikle dem (Kilpatrick et al., 2001). Engasjement er den tredje mest fremtredende komponenten. Selv om det kan være utfordrende å identifisere om elevene anser matematikk som meningsfullt, nyttig og verdifullt, har vår tolkning av det integrerte rammeverket ledet oss til at vi har identifisert engasjement ved flere anledninger. Dette kan også skyldes oppgavens natur, da Hodge-Zickerman et al. (2020) hevder at taktile læringsaktiviteter kan tilby elevene en alternativ måte å lære matematikk på ved å engasjere dem og stimulere til kreativ tenking rundt matematikken. Dette støttes ytterligere av Pedaste et al. (2015) som skriver at lærere ved å benytte utforskende undervisning kan skreddersy læringsopplevelsen for å passe til elevenes unike behov og interesser, noe som kan øke engasjementet og motivasjonen. Artigue og Blomhøj (2013) påpeker i tillegg at økt bruk av utforskende undervisning i matematikk de siste årene, viser en økende annerkjennelse av viktigheten av aktiv læring og engasjement i matematikk. Beregning og anvendelse er også identifisert. Dette støttes av Hodge-Zickerman et al. (2020) som hevder at taktile læringsaktiviteter ikke hindrer læring av prosedyremessige ferdigheter.

Alle komponentene av matematisk kompetanse er identifisert. Dette støtter Kilpatrick et al. (2001) sin påstand om at komponentene er tett tilknyttet hverandre og representerer forskjellige sider av en helhetlig matematisk kompetanse der komponentene utvikles parallelt. Videre vil vi diskutere forskjellene mellom oppgavene og likheten mellom gruppene.

5.3.1. Forskjellen mellom oppgaven

Figur 9 viser alle de identifiserte komponentene i gruppenes arbeid med både oppgave 1 og 2. Her er det et tydelig skille mellom de tre mest og de to minst fremtredende komponentene. Figur 9 gir et ufullstendig bilde av hvor komponentene er identifisert. For å få et mer nyansert

inntrykk, har vi derfor valgt å presenter oppgavene hver for seg (figur 10). Dette vil kunne gi et bedre bilde av hvorfor spredningen av komponentene er slik det fremstilles i figur 9.

I figur 10 ser vi at de mest fremtredende komponentene i oppgave 1 og 2, er resonnement, forståelse og engasjement. I oppgave 1 er det en betydelig forskjell på mengden av de tre mest fremtredende kontra de to minst fremtredende i motsetning til oppgave 2 hvor fordelingen er jevnere. Hele 91% av alle komponentene vi identifiserte i oppgave 1 var enten resonnement, forståelse eller engasjement. Resonnement utgjorde hele 39%, mens beregning utgjorde kun 1%. I oppgave 2 utgjør resonnement 29%, mens de andre komponentene ligger mellom 15 og 22%. Dette indikerer at oppgave 1 har stor betydning for spredningen vi ser når vi presenterer resultatet fra de to gruppene (figur 9).

Årsaken til denne markante forskjellen skyldes oppgavens utforming. Oppgave 1 omhandler den geometriske figuren møbiusbånd, som er en interessant figur med spesielle egenskaper som elevene ikke var kjent med på forhånd. Spørsmålene i denne oppgaven (vedlegg 1) omhandler egenskapene til figuren og hva som skjedde når elevene klippet i den. Dette betyr at oppgaven i liten grad krevde at elevene skulle utføre beregninger, men heller diskutere og tenke logisk for å komme frem til svarene. Resultatene av kodingen reflekterer dette. Vi var klar over at dette var et mulig utfall da vi utformet opplegget, og inkluderte derfor sylinderopgaven som vi mente ville gi elevene en større mulighet til å benytte seg av beregninger. Sylinderopgaven (vedlegg 2) dreier seg om volumet av sylindere. Her skulle elevene blant annet regne ut volumet av to forskjellige sylindere for å finne ut hvilken som rommet mest. Ved å stille spørsmål som «*Rommer sylindrene like mye eller er volumene til sylindrene ulikt?*», og deretter be elevene om å løse oppgaven på minst to måter, legger oppgaven opp til at elevene kan utføre beregninger. Resultatene av kodingen reflekterer også dette.

Måten disse to oppgavene er utformet på, har betydning for hvilke komponenter som kommer til syne i elevenes diskusjoner. Det at oppgave 1 i liten grad legger opp til at elevene skal kunne beregne og anvende metoder for beregning, gir utslag i det samlede resultatet av alle komponentene som ble identifisert i hver gruppe (figur 9). Noe som er interessant å merke seg, er imidlertid at selv om elevene benyttet seg mindre av beregning i oppgave 1, så ble det ikke identifisert færre komponenter samlet sett når vi sammenlikner oppgave 1 og 2 (figur 10). I stedet ble det identifisert flere tilfeller av resonnement, forståelse og engasjement, slik at den

totale mengden med komponenter som ble identifisert i de to oppgavene forholdt seg relativt lik. Dette kan tyde på at elevene ble mer avhengige av å resonnere seg frem til en felles forståelse av fenomenet i oppgave 1, enn i oppgave 2, hvor de kunne bruke mer beregning og anvendelse. Det at engasjement også kommer tydeligere frem i oppgave 1, kan være et tegn på at denne måten å arbeide med matematikk på oppleves som spennende og mer engasjerende for elevene. Dette støttes av Kilpatrick et al. (2001, s. 131) som hevder at engasjement utvikles når de andre komponentene forsterkes, samt opprettholder et nært og sammenkoblet forhold til hverandre.

Oppgave 2 (vedlegg 2) er utformet på en slik måte at den gir større mulighet for elevene til å vise beregning og anvendelseskunnskap enn oppgave 1 (vedlegg 1). Den store spredningen mellom komponentene i oppgave 1, er dermed med på å gi det utslaget vi ser i figur 9.

5.3.2. Likheten mellom gruppene

Gjennom analyse av transkripsjonene, har vi til sammen identifisert 1536 tilfeller av komponenter fordelt på begge gruppene (ca. 700 i gruppe 1 og 800 i gruppe 2). Hvis vi ser på figur 11, som viser hvor mange ganger vi har identifisert de ulike komponentene hos begge gruppene, så dukker det opp et interessant bilde. Fordelingen av komponentene er tilnærmet lik hos begge gruppene. Med dette mener vi at resonnement ble identifisert flest ganger, etterfulgt av forståelse, engasjement, anvendelse og så beregning. Det eneste som skiller seg ut i dette diagrammet, er at vi identifiserte noe mer forståelse og engasjement i gruppe 2. Dette var forventet da elevene i gruppe 2 mestret flere av oppgavene enn elevene i gruppe 1. Kilpatrick et al. (2001, s. 131) sin påstand om at engasjement utvikles når de andre komponentene forsterkes, støtter funnet av mer engasjement sammen med forståelse. Det faktum at rekkefølgen på komponentene fra mest til minst identifisert er lik hos begge gruppene er interessant og styrker resultatene våre. Det er kodet for komponenter i gruppens diskusjoner separat, uten at vi hadde noen formening om hvor mange komponenter vi kom til å identifisere i de to gruppene. Det kan også være et tegn på at oppgaver som er utforskende og bruker taktile læringsaktiviteter fører til at komponentene resonnement, forståelse og engasjement blir mest fremtredende. Siden vi har et lite utvalg av informanter, kan vi ikke si dette med sikkerhet. Det

er likevel et funn som er verdt å påpeke.

5.4. IMPLIKASJONER AV STUDIEN

Ifølge Kunnskapsdepartementet (2020) har fagfornyelsen som formål å forberede elevene på fremtiden, både i forhold til arbeidsliv, videre studier og som aktive borgere i et demokratisk samfunn. Dette innebærer blant annet å styrke dybdelæring og kritisk tenking. Dybdelæring handler om å utvikle en dypere forståelse av fagene ved å flytte fokuset fra å pugge fakta til å forstå og anvende kunnskap. Kritisk tenking innebærer å kunne vurdere informasjon og argumenter på en kritisk måte, noe som er stadig viktigere i dagens informasjonssamfunn. I tillegg er det et ønske om å gjøre fagene mere praktisk og relevante ved å legge vekt på problemløsning og kreativitet. Dette er nært tilknyttet kjerneelementene i matematikk fordi de beskriver de mest sentrale og grunnleggende ferdighetene, kunnskapene og forståelsene som elevene trenger for å utvikle matematisk kompetanse (Kunnskapsdepartementet, 2020).

Vi ønsker som fremtidige lærere å ruste elevene våre på best mulig måte for fremtiden. Elevene vil møte på utfordringer som de ikke på forhånd har svaret på. Kilpatrick et al. (2001, s. 116) påpeker at hensikten med matematisk kompetanse er å forberede elevene på matematiske utfordringer i dagliglivet, videre i utdanningen og arbeidskarrieren. Et eksempel på en slik utfordring kan være at eleven senere i livet skal lage en bokhylle i boligen sin. Her er det flere spørsmål som må besvares, da det finnes flere måter å løse problemet på. Hvor høyt på veggen skal hyllen plasseres? Hvordan skal hylle se ut? Hvor mye materialer trengs? Osv. Utforskende undervisning har ofte en tilknytning til problemløsning, da flere problemløsningsstrategier tas i bruk (Pedaste & Sarapuu, 2006, s. 48). Dette betyr at et slikt hverdagsproblemløsningsproblem krever at elevene jobber utforskende. I tillegg krever det en taktil tilnærming, ved at de må måle, kappe, skru og lignende. I denne studien har elevene jobbet utforskende og taktilt med sylindere og møbiusbånd. Dette er med på å fremme ferdigheter som elevene kan få bruk for i sitt fremtidige liv, slik som eksemplet ovenfor viser.

Muntlige ferdigheter er en av de fem grunnleggende ferdighetene som elevene må kunne. Elevene vil senere i utdanningsløpet møte på vurderingssituasjoner som krever denne ferdigheten, for eksempel ved muntlig eksamen. Vi erfarte at opplegget legger opp til muntlig

deltakelse gjennom diskusjoner. Dette støttes av resultatene, da vi identifiserte mest resonnement. I tillegg refererer Hodge-Zickerman et al. (2020) og Alfieri et al. (2011) til tidligere studier, hvor taktile læringsaktiviteter og utforskende undervisning påvirket deltakernes læring positivt. Vi kan dermed si at opplegget også vil forberede elevene på videre utdanning.

Hodge-Zickerman et al. (2020) hevder at det finnes solid dokumentasjon for viktigheten av kreativ tenkning i matematikk. Likevel betraktes matematikklasserom ofte som formelle, strukturerte miljøer, hvor elever tilegner seg matematisk kunnskap på en hovedsakelig algoritmisk måte. Dette gjør at elevene oppfatter matematikk som noe en pugger. Taktile læringsaktiviteter kan bidra til å motvirke dette, ved å engasjere elever i matematikk på en mer praktisk og kreativ måte (Hodge-Zickerman et al., 2020). Det samme kan utforskende undervisning, ved å oppmuntre til kritisk tenkning, selvstendighet og problemløsning (Pedaste et al., 2015). Dette bidrar til dybdelæring ved at elevene utvikler en dypere forståelse av faget, ved å flytte fokuset fra å pugge fakta til å forstå og anvende kunnskap (Kunnskapsdepartementet, 2020). Samarbeidet mellom elever som jobber med taktile læringsaktiviteter og utforskende undervisning, oppmuntrer til kommunikasjon og mellommenneskelige ferdigheter (Hodge-Zickerman et al., 2020; Pedaste et al., 2015). Dette er igjen viktig for fremtidige yrkesutøvelse og som aktive borgere i et demokratisk samfunn.

Taktile læringsaktiviteter og utforskende undervisning er metoder som bidrar til å realisere formålene til fagfornyelsen. Det styrker dybdelæring og kritisk tenking, samt de mest sentrale og grunnleggende ferdighetene, kunnskapene og forståelsene som elevene trenger for å utvikle matematisk kompetanse. Disse ferdighetene er viktige for at elever skal være godt forberedt på hverdagslige utfordringer, videre utdanning og fremtidig yrkesutøvelse. Teorien bak denne undervisningsformen støtter fagfornyelsens formål. Studien vi har gjennomført undersøker et undersøkende undervisningsopplegg som benytter taktile læringsaktiviteter, og kan derfor bidra til å gi innsikt i hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom slike opplegg. Denne innsikten kan hjelpe lærere og skoler med å forstå hva denne typen undervisning kan tilby.

6. AVSLUTNING

Problemstillingen for denne oppgaven er:

Hvilken matematisk kompetanse kan identifiseres gjennom et utforskende geometriopplegg med taktile læringsaktiviteter?

Vi vil i dette kapittelet presentere noen avsluttende refleksjoner, og til slutt rette blikket mot videre forskning på feltet vi har undersøkt.

6.1. AVSLUTTENDE REFLEKSJONER

Målet med denne studien har vært å undersøke hvordan utforskende undervisning og taktile læringsaktiviteter kan brukes i matematikkundervisning, samt hvilke komponenter av matematisk kompetanse som kan identifiseres gjennom slike opplegg. Vår interesse for dette temaet skyldes et ønske om å inkludere mer utforskende og praktisk undervisning i vår egen framtidige yrkesutøvelse. Videre har vi observert hvordan slike opplegg kan forberede elever på matematiske utfordringer i dagliglivet, videre utdanning og arbeidslivet.

Studien viser at utforskende undervisning med taktile læringsaktiviteter kan ha en positiv innvirkning på utviklingen av ulike aspekter ved en helhetlig matematisk kompetanse. Begge oppgavene i studien viste seg å være av utforskende karakter og inneholdt taktile læringsaktiviteter. Alle de fem komponentene i det integrerte rammeverket ble identifisert i opplegget, noe som indikerer at de er nært relaterte og gjensidig sammenkoblede. Det er imidlertid forskjeller mellom komponentene som ble identifisert i de to oppgavene, med mindre *beregning* og *anvendelse* i møbiusbåndoppgaven og mer i sylindroppgaven. *Resonnement*, *forståelse* og *engasjement* ble identifisert oftest, noe som kan komme av at elevene samarbeidet aktivt, jobbet kreativt med fysiske objekter og diskuterte for å oppnå felles forståelse. Dette viser at elevene i stor grad evner å resonnerer, forstå og engasjere seg i arbeidet.

Selv om vi ikke kan konkludere med at elevenes matematiske kompetanse utvikles direkte gjennom dette opplegget, tyder funnene på at utforskende og taktile læringsaktiviteter kan brukes for å trene matematisk kompetanse. Dette ettersom de ferdighetene som trenes blir brukt aktivt i prosessen.

Denne studien har gitt oss dypere forståelse av hvordan vi som lærere kan benytte utforskende undervisning og taktile læringsaktiviteter, samt hvilken kompetanse de gir uttrykk for. Vi har blitt bedre kjent med relevant forskning og utvidet vår innsikt i matematikkundervisning og læring. Vi håper at andre studenter og lærere også kan dra nytte av denne studien, og at den kan inspirere til en økt interesse for praktisk og utforskende undervisning. Videre ønsker vi å motivere til implementering av slike opplegg på en effektiv og hensiktsmessig måte.

6.2. VEIEN VIDERE

Arbeidet med denne studien har vært interessant, og vi har gjort oss opp mange refleksjoner og tanker underveis. Siden studien baserer seg på et begrenset utvalg informanter, er det flere spørsmål vi ikke har hatt mulighet til å svare på. Det ville vært interessant å undersøke om de samme resultatene vil forekomme med en annen elevgruppe, et større antall informanter eller elever på andre trinn.

Som bakgrunn for studien, har vi lagt vekt på fagfornyelsen formål med undervisningen. Her er det et ønske om at matematisk kompetanse skal kobles til elevenes hverdag samt forberede dem på videre utdanning og arbeidsliv. Dette er nært tilknyttet kjerneelementene i matematikk fordi de beskriver de mest sentrale og grunnleggende ferdighetene, kunnskapene og forståelsene som elevene trenger for å utvikle matematisk kompetanse. Ved å jobbe utforskende med matematikk og benytte taktile læringsaktiviteter i undervisningen, får man innsikt i én måte å arbeide med matematikk på som støtter dette formålet. Det vil imidlertid fortsatt være et behov for mer forskning knyttet til feltet.

I denne studien har vi kun hatt mulighet til å teste ut to utforskende oppgaver som benytter taktile læringsaktiviteter. Det ville derfor også vært interessant å se på hvilken matematisk kompetanse som kan identifiseres i andre oppgaver med samme tilnærming. Dette vil gi mulighet til å si noe mer generelt om den kompetansen som slike opplegg fremmer.

LITTERATURLISTE

- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J. & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of educational psychology*, 103(1), 1.
- Alrø, H. & Kristiansen, M. (1997). Mediet er ikke budskapet: video i observation af interpersonel kommunikation. I *Videoobservation* (s. 73-99). Aalborg Universitetsforlag.
- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *Zdm*, 45, 797-810.
- Backe-Hansen, E. & Frønes, I. (2012). Metoder og perspektiver i barne-og ungdomsforskning. Oslo: Gyldendal Akademisk.
- Bjørndal, C. R. (2017). *Det vurderende øyet: observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis*. Gyldendal akademisk.
- Bjørndal, C. R. P. (2017). *Det vurderende øyet : observasjon, vurdering og utvikling i pedagogisk praksis* (3. utg. utg.). Gyldendal akademisk.
- Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007a). Strategies for data collection and researching: Questionnaire. *Research methods in education. 6th edition. Routledge, Abingdon, United Kingdom*, 317-346.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007b). Strategies for data collection and researching: Questionnaire. *Research methods in education. 6th edition. Routledge, Abingdon, United Kingdom*.
- Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2018). *Research design : qualitative, quantitative & mixed methods approaches* (5. utg.). Sage.
- Creswell, J. W. & Poth, C. N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.
- De Jong, T. & Van Joolingen, W. R. (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of educational research*, 68(2), 179-201.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Suny Press.
- Ernest, P. (2009). What is first philosophy in mathematics education. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,
- Finlay, L. (2002). Negotiating the swamp: the opportunity and challenge of reflexivity in research practice. *Qualitative research*, 2(2), 209-230.
- Fosnot, C. T. & Dolk, M. L. A. M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents*. Heinemann Portsmouth.
- Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H. & Briggs, D. C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching: A meta-analysis. *Review of educational research*, 82(3), 300-329.
- Gilje, N. & Grimen, H. (1995). *Samfunnsvitenskapenes forutsetninger : innføring i samfunnsvitenskapenes vitenskapsfilosofi* (2. utg. utg.). Universitetsforl.
- Hodge-Zickerman, A., Stade, E., York, C. & Rech, J. (2020). TACTivities: Fostering Creativity through Tactile Learning Activities. *Journal of humanistic mathematics*, 10(2), 377-390.
<https://doi.org/10.5642/jhumath.202002.17>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & council, N. r. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Bd. 2101). National Academy Press Washington, DC.
- Krumsvik, R. J. (2014). Forskningsdesign og kvalitativ metode: ei innføring.
- Kunnskapsdepartementet. (2020). *Lærerplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Lærerplanverket for Kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer?lang=nob>

- Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M. & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg. utg.). Gyldendal akademisk.
- Larkin, M., Flowers, P. & Smith, J. A. (2021). Interpretative phenomenological analysis: Theory, method and research. *Interpretative phenomenological analysis*, 1-100.
- Lou, Y., Abrami, P. C. & d'Apollonia, S. (2001). Small group and individual learning with technology: A meta-analysis. *Review of educational research*, 71(3), 449-521.
- Matematikksenteret. (2014). Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet.
<https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/revidert-bakgrunnsdokument-endelig.pdf>
- Merriam, S. B. & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.
- NAOB. *Taktil*. Det Norske Akademi for Språk og Litteratur. <https://naob.no/ordbok/taktil>
- NESH. (2021, 16. desember 2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. NESH. <https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/?fbclid=IwAR1j-NLOs9nKcuFjTwlYOL2ODD6WPRECcL45xIFgcTRJWtrpAYZBpUb88A>
- Niss, M. A. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematikklæring: ideer og inspiration til utvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets forlag.
- Nortvedt, G. A. & Pettersen, A. (2016). 6 Matematikk. I *Stø kurs: Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015* (s. 107-135). Universitetsforlaget Oslo.
- Pedaste, M., Mäeots, M., Leijen, Ä. & Sarapuu, T. (2012). Improving students' inquiry skills through reflection and self-regulation scaffolds. *Technology, Instruction, Cognition and Learning*, 9(1-2), 81-95.
- Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L. A., De Jong, T., Van Riesen, S. A., Kamp, E. T., Manoli, C. C., Zacharia, Z. C. & Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational research review*, 14, 47-61.
- Pedaste, M. & Sarapuu, T. (2006). Developing an effective support system for inquiry learning in a web-based environment. *Journal of computer assisted learning*, 22(1), 47-62.
- Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold : samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (4. utg. utg.). Fagbokforl.
- Schoenfeld, A. H. & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *Zdm*, 45, 901-909.
- Tangen, R. (2010). «Beretninger om beskyttelse» – Etske dilemmaer i forskning med sårbare grupper – barn og ungdom. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, 94(4), 318-329.
<https://doi.org/10.18261/ISSN1504-2987-2010-04-07>
- Utdanningsdirektoratet. (2021a). *Overordnet del. Kompetanse i fagene*. Fastsatt som forskrift. Lærerplanverket for kunnskapsløftet 2020. <https://www.udir.no/lk20/overordnet-del/prinsipper-for-laring-utvikling-og-danning/kompetanse-i-fagene/?curriculum-resources=true>
- Vygotsky, L. S. & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.

VEDLEGG

Vedlegg 1- Möbiusbåndoppgave

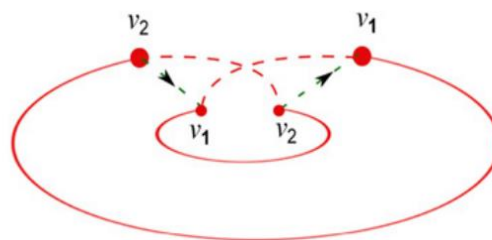
Oppgave 1

Foran deg ser du en sylinder. Utforsk hvor mange ytterkanter og sideflater denne figuren har. Diskuter og skriv ned.



Oppgave 2

Du skal lage et møbiusbånd ved hjelp av papirremsen foran deg. På enden til hver remse står det A og B i hvert sitt hjørne. Vri den ene enden av remsen en gang og koble endene sammen slik at A møter A og B møter B. bruk teip for å feste båndet sammen. Se bilde.





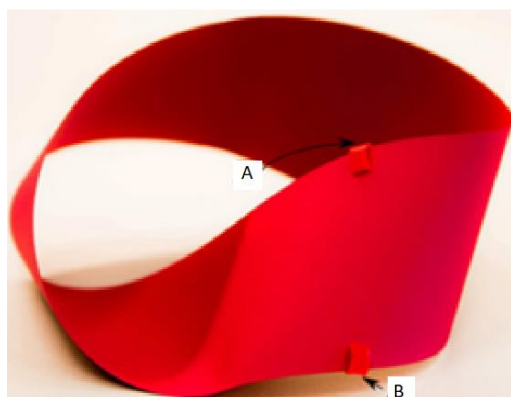
Möbiusbåndet skal se slik ut når det er ferdig.

2.2

Hva er forskjellen på møbiusbåndet og sylinderen dere studerte først?

Oppgave 3:

Båndet du har laget har nå 2 bokstaver på ytterkanten slik som på bildet.



3.1

Hvor mange ytterkanter har båndet? Diskuter og skriv ned det dere tenker.

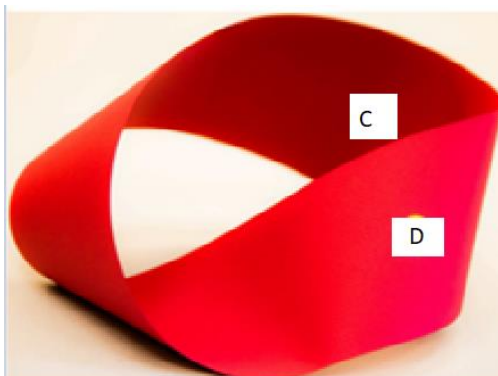
Sett en finger på ytterkanten ved A. La fingeren din følge ytterkanten fra A og se om du kan komme til B og så videre til A uten å endre retningen på fingeren, eller løfte fingeren fra kanten.

3.2

Hva kan dere nå si om antall ytterkanter på møbiusbåndet? Diskuter, tegn og forklar hvorfor og hvordan dere får dette svaret.

Svar:

Holde møbiusbåndet med pekefinger og tommel på hver sideflate. Skrive C og D ved siden av hver finger, i midten av båndet. Se bildet.



3.3

Hvor mange sideflater tror dere at møbiusbåndet har? Diskuter og skriv ned det dere tenker.

3.4

Tegn en strek med blyant i midten av båndet. Start streken ved C, se om du kan tegne en strek som starter ved C og går gjennom D og så kommer videre til C. blyanten skal ikke løftes fra båndet og kan ikke endre retning underveis.

Hva kan dere si om antall sider og kanter på møbiusbåndet? Hvorfor er det slik? Diskuter og skriv ned.

Oppgave 4

Dere skal snart klippe langs streken dere har tegnet i midten av båndet (fra C-D).

NB! Ikke klipp enda.

4.1

Diskuter og lag en hypotese som forteller hva dere tror kommer til å skje når dere klipper båndet. Hva skjer? Hvilke(n) figurer oppstår? Hvor mange «twister» har figuren(e)? (Møbiusbåndet har en «twist» før dere klipper det) hvor mange sider har de(n) nye figurene?

Klipp båndet langs streken.

4.2

Hva skjedde? Hvilke(n) figur(er) fikk dere? Hvor mange «twister» har de(n)? Hvor mange sideflater har de(n)? Diskuter og skriv ned.

4.3

Hvorfor fikk dere dette resultatet? Diskuter, tegn og forklar.

Tegn:



Forklar:

Oppgave 5

Dere får nå et nytt møbiusbånd. Dere skal nå lage en hypotese som forteller hva som skjer når dere klipper båndet langs streken 1 cm fra kanten, og følger kanten på båndet til det møter punktet du startet i.

5.1

Diskuter og lag en hypotese som forteller hva dere tror kommer til å skje når dere klipper båndet. Hva skjer? Hvilke(n) figurer oppstår? Hvor mange «twister» har figuren(e)? hvor mange sideflater har de(n) nye figurene?

Klipp båndet.

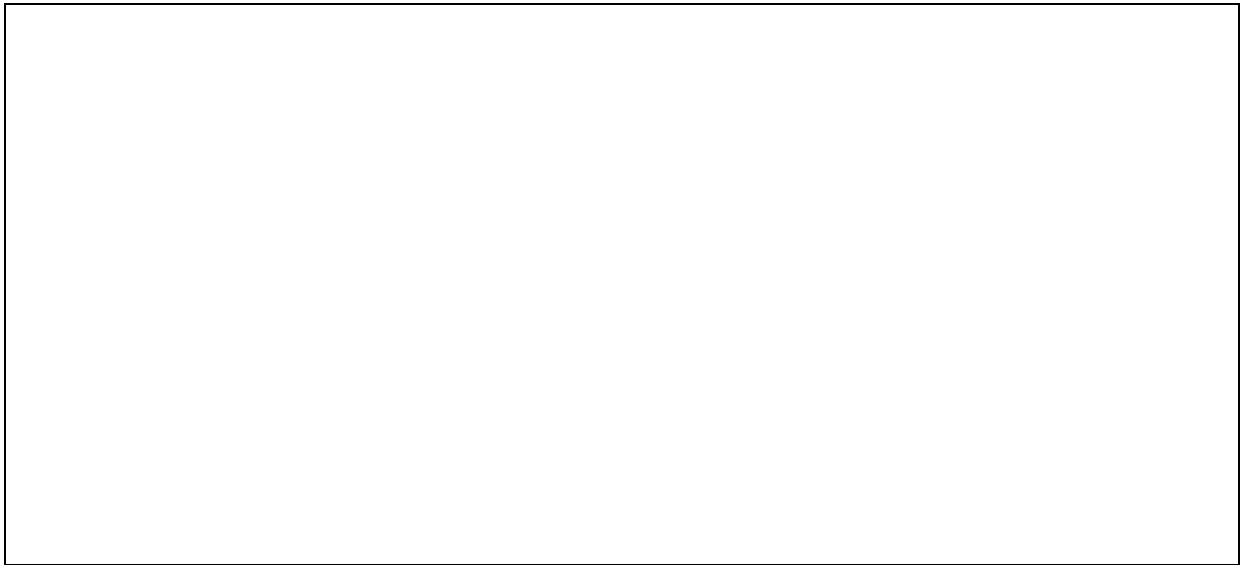
5.2

Hva skjedde? Hvilke(n) figurer fikk dere? Hvor mange twister har de(n)? Hvor mange sideflater har de(n)? Diskuter og skriv ned.

5.3

Hvorfor fikk dere dette resultatet? Diskuter, tegn og forklar.

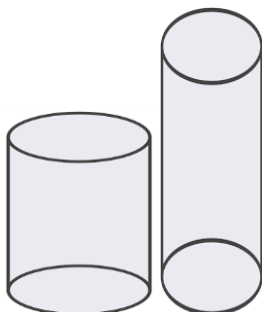
Tegn:



Forklar:

Vedlegg 2 - Sylinderoppgave

Dere har fått to a4 ark. Bruk disse til å folde to sylindere. Den ene skal foldes over kortsiden og den andre skal foldes over langsiden.



Oppgave 1. Diskutere om sylindrerne rommer like mye eller om volumet er ulikt. Lag og skriv ned hypotesen/hypotesene og skriv den/dem ned. Begrunn hvorfor dere valgte denne hypotesen.

(Hypotese = En gjetning, antagelse eller forklaring, som man senere forsøker å avkrefte eller bekrefte.)

Hypotese:

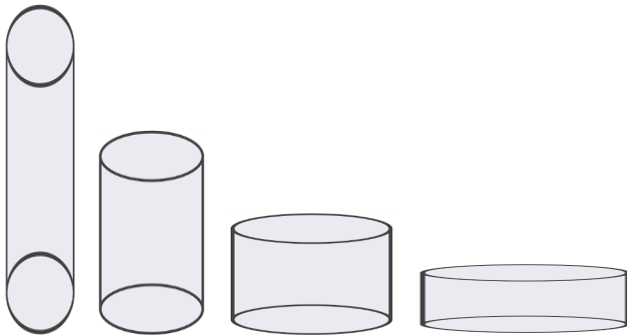
Oppgave 2. Rommer sylindrerne like mye eller er volumene til sylindrene ulikt?

Løs oppgaven på to eller flere måter. På bordet ligger det hjelpemidler dere kan bruke.

Oppgave 3. Diskuter svaret dere fant i oppgave 2.

Samsvarte svaret i oppgave 2 med hypotesen deres? Oppdaget dere noe interessant med volumet til sylindrerne. Hvis ja, hva og hvorfor?

Oppgave 4.



Kan du bruke det samme a4-arket til å lage en sylinder med større volum? Hvor stort kan volumet bli?

Vedlegg 3 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Matematisk kompetanse gjennom et praktisk og utforskende geometriopplegg»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å finne ut hvilken matematisk kompetanse som kommer til syne i et praktisk og utforskende geometriopplegg. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

I forbindelse med den nye lærerplanen LK20, har praktisk og utforskende undervisning kommet inn som viktige arbeidsmåter. Dette er noe vi ønsker å se nærmere på. Formålet med studien er derfor å forsøke å gi et svar på hvilke av Kilpatrick sine fem tråder for matematikk kompetanse, som kommer til syne når elever på 9-trinn, jobber med et praktisk og utforskende opplegg knyttet til møbiusbånd og sylindere. Dette prosjektet er et masterprosjekt, og er avslutningen på vårt utdanningsløp. Oppgaven vil derfor være vårt siste steg mot å bli lærere. Deltakerne i studien vil bli anonymisert da det i denne oppgaven er det matematiske som er viktig.

Problemstilling:

Hvilken matematisk kompetanse synliggjøres gjennom et praktisk og utforskende geometriopplegg?

Forskningsspørsmål:

1. Hvilke av Kilpatrick sine fem tråder kommer til syne i et opplegg med møbiusbånd hos elever på 9-trinn?

2. Hvilke av Kilpatrick sine fem tråder kommer til syne i et opplegg med sylindere hos elever på 9-trinn?

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Høgskolen i Østfold er ansvarlig for prosjektet.

Vi er masterstudentene Peder Ramberg og Vetle Vikanes og veileder Johan Bredberg. Vi har ansvaret for å ivareta deg og dine opplysninger.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Grunnen til at du blir spurt om å delta er fordi du går i 9-klasse, og har geometri som pensum. Du er tilfeldig utvalgt sammen med 5 andre elever i klassen din. Vi har fått opplysningene om deg, fra din mattelærer.

Hva innebærer det for deg å delta?

- Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at det blir tatt video og lydopptak av deg, i ditt arbeid med geometrioppgaver.
- Det vil ta deg ca. 2 skoletimer.
- Oppgavene skal gjøres i en gruppe bestående av deg og 2 andre elever, på et grupperom.
- Vi ser etter den matematiske kompetansen som kommer frem i deres diskusjoner mens oppgavene løses.
- Vi ønsker at du deltar i diskusjoner knyttet til oppgavene og bidrar med dine tanker og mulige løsningsstrategier.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha

noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Det vil ikke påvirke ditt forhold til skolen eller læreren din.

Hvis du ønsker å trekke deg, er det bare å ta kontakt med en av de ansvarlige for prosjektet (Studenter: Vetle Vikanes og Peder Ramberg, eller Veileder: Johan Bredberg). Da vil video og lydopptak av deg slettes, og samtykkeskjemaet vil makuleres. Det vil da ikke være mulig å koble deg til prosjektet på noen som helst måte.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- Det vil kun være oss to studenter (Vetle Vikanes og Peder Ramberg) samt vår masterveileder (Johan Bredberg) som har tilgang til dine opplysninger.
- Navnet og kontaktopplysningene dine vil ikke bli benyttet i prosjektet.
- Eventuelle personidentifiserende opplysninger vil bli anonymisert eller fjernet.
- Det er kun oss studenter (Vetle Vikanes og Peder Ramberg) samt vår masterveileder (Johan Bredberg) som har tilgang til Video og lydopptak. Det er kun oss studenter som filmer og tar opptak.
- Dataene fra video og lydopptak vil bli lagret ved hjelp av Microsoft Teams i skyen, beskyttet med flerfaktor autorisering. På denne måten vil kun de prosjektansvarlige ha tilgang til datamaterialet.
- Samtykkeskjemaet kommer til å oppbevares på et annet sted enn videomaterialet. Det vil låses inn for å sikre at kun de prosjektansvarlige har tilgang.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Prosjektet vil etter planen avsluttes når oppgaven blir godkjent. Prosjektslutt er planlagt den 31.08.2023. Etter projektslutt vil datamaterialet med dine personopplysninger slettes. Deltakerne vil etter endt projektslutt ikke kunne spores av noe.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Høgskolen i Østfold* har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- Innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- Å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende.
- Å få slettet personopplysninger om deg.
- Å sende klage til datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- *Masterstudenter ved Høgskolen i Østfold. Peder Ramberg: Mail [redacted] eller Tlf. [redacted] og Vetle Vikanes: Mail [redacted] eller Tlf: [redacted]*
- *Veileder. Johan Per Ivar Bo Bredberg: Mail [redacted] eller Tlf. [redacted]*
- Vårt personvernombud ved Høgskolen i Østfold: Julie Dessen kan kontaktes via mail: [redacted] eller telefon [redacted].

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Forskere/Prosjektansvarlig

(Vetle Wilhelm Due Vikanes, Peder Ramberg/ *Johan Per Ivar Bo Bredberg*)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «Matematisk kompetanse gjennom et praktisk og utforskende geometriopplegg», og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ Å delta i et gruppearbeid som filmes.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

(Signert av prosjektdeltaker og foresatt, dato)

Vedlegg 4 – Godkjent søknad fra NSD

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer

593614

Vurderingstype

Standard

Dato

04.01.2023

Prosjekttittel

Matematisk kompetanse gjennom et praktisk og utforskende geometriopplegg

Behandlingsansvarlig institusjon

Høgskolen i Østfold / Fakultet for lærerutdanning og språk / Institutt for real-, praktisk-etiske-, samfunns- og religionsfag

Prosjektansvarlig

Johan Bredberg

Student

Vetle Wilhelm Due Vikanes

Prosjektperiode

20.01.2023 - 31.08.2023

Kategorier personopplysninger

Alminnelige

Lovlig grunnlag

Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 31.08.2023.

Kommentar

Vår vurdering er at den planlagte behandlingen i dette prosjektet er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg og vurderingen her.

OM VURDERINGEN

Sikt har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER

Vi har vurdert at du har lovlig grunnlag til å behandle personopplysningene, men husk at det er institusjonen du er ansatt/student ved som avgjør hvilke databehandlere du kan bruke og hvordan du må lagre og sikre data i ditt prosjekt. Husk å bruke leverandører som din institusjon har avtale med (for eksempel ved skylagring, nettpørreskjema, videosamtale eller liknende).

Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

MELD VESENTLIGE ENDRINGER

Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Se våre nettsider om hvilke endringer du må melde: <https://sikt.no/melde-endringer-i-meldeskjema>

OPPFØLGING AV PROSJEKTET

Vi vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Lykke til med prosjektet!