MAGLU5-10

Høgskolen i Østfold

MASTEROPPGAVE

Problemløsningsstrategier i arbeid med 3D-printing

William Walentin Mathisen & Simon Magnus Molteberg

15. Mai 2023

Grunnskolelærerutdanning 5-10

Fakultet for lærerutdanning og språk

Forord

Det er med stor glede, men samtidig vemodig å kunne si at vi har fullført en 5-årig lærerutdanning på Høgskolen i Østfold. Det har vært en lærerik del av livet, og gjennom disse 5 årene har vi utviklet oss som både lærere og personer. Det er spesielt å tenke på at alle disse årene avsluttes med denne masteroppgaven, og dette har vært en svært interessant, men også til tider frustrerende prosess. Det har blitt mange tunge skriveøkter, og mye tid brukt på masterrommet, men vi er stolte og fornøyde med oppgaven vi har skrevet. 3D-printing i undervisning har for oss vist seg å være utrolig spennende, og noe vi kommer til å ta med oss videre i arbeidet som lærer.

Først og fremst vil vi gi en stor, stor takk til vår veileder Henrik Stigberg. Vi er utrolig takknemlig for all tiden du har brukt på veiledning, tilbakemelding og for at du alltid har spurt oss «men varför?». Din interesse for dette temaet har preget alle de gode diskusjonene vi har hatt med deg, og du har fått oss til å reflektere over alle valg vi har tatt. Vi vil også takke hverandre for det gode samarbeidet i denne prosessen, og i løpet av alle de 5-årene med utdanning og praksis sammen. Et samarbeid som har fungert svært godt, og ingen av oss ville vært foruten. I tillegg vil vi rette en takk til våre medstudenter, Ole-Johan Bjerketvedt, Peder Ramberg og Vetle Vikanes for all god stemning dere har bidratt med i løpet av disse 5-årene. Vi vil også takke The New York Times for å legge ut en ny Wordle hver dag, som har fått oss i gang med skrivingen.

Vi vil også rette en stor takk til informantene og læreren som har tilrettelagt for at vi kunne gjennomføre både pilot og datainnsamling. Uten dere hadde ikke forskningen vært mulig å gjennomføre!

Til slutt vil vi takke familie og venner som har vært støttende, og tilrettelagt for at vi har fått tid til å prioritere oppgaven. Simon vil også rette en spesiell takk til samboeren sin Emilie Nordhagen. Nå gleder vi oss begge to til å begynne i jobb som lærere etter en god ferie, og bruke den opparbeidede kunnskapen og erfaringen i arbeidslivet.

William Walentin Mathisen og Simon Magnus Molteberg

Sammendrag

Denne masteroppgaven handler om hvilke problemløsningsstrategier fire elever på 9.trinn benytter seg av i arbeid med en rik-oppgave med 3D-printing. Elevene har gjennomført ett undervisningsopplegg om emnet geometri, der de skulle modellere deres egne blyantbeholdere. Undervisningsopplegget gikk over to undervisningsøkter med en ukes mellomrom, der elevene først modellerte beholderne på Tinkercad, og fikk disse tilbake som ferdige 3D-printede modeller neste økt. Studiens datamateriale bygger på video- og lydopptak av elevenes observerte diskusjoner, arbeid med oppgaver og beholderne elevene har modellert. Det teoretiske rammeverket tar utgangspunkt i et konstruksjonistisk læringsperspektiv, og gjennom Posamentier og Krulik (2008) sine ti strategityper kategoriseres elevenes bruk av problemløsningsstrategier.

Resultatene fra denne studien viser at elevene brukte flere ulike problemløsningsstrategier, i møte med ulike problemer. Åtte ulike problemløsningsstrategier ble identifisert i elevenes arbeid med en rik-oppgave med 3D-printing. *Logisk resonnement* var problemløsningsstrategien som ble mest brukt av elevene i deres arbeid med oppgavene, som kan henge sammen med at det kan knyttes til hverdagslige situasjoner. Det var også noen strategityper som ikke ble brukt av elevene i deres arbeid. *Organisere datamaterialet og gjøre rede for alle muligheter* ble ikke identifisert, og dette kan henge sammen med oppgavens ordlyd eller elevenes *verktøykasse* (Schoenfeld, 2016). Det ble også diskutert om 3D-printing har noen betydning for hvordan elevene bruker strategiene, og vi trekker frem faktorer som representasjonene elevene har tilgjengelig, samarbeid med å modellere beholderen og kroppsspråk og gestikulering med de visuelle og fysiske representasjonene som betydningsfulle for elevenes bruk av strategiene.

For å gi leseren en innsikt i hva undervisningsopplegget gikk ut på og hva elevene har modellert, undersøkte vi også hvilke beholdere elevene modellerte. Her trekker vi frem faktorer som samarbeid og diskusjon, og oppgavens muligheter for flere svar som betydningsfulle for beholderens utseende og funksjon.

Nøkkelord: 3D-printing, problemløsningsstrategier, rik-oppgave, tinkercad, konstruksjonisme.

Abstract

This master's thesis examines the problem-solving strategies used by four ninth-grade students while working on a rich-task involving 3D printing. The students completed a geometry teaching unit, where they modeled their own pencil holders. The teaching unit spanned two sessions with a week in between, where students initially modeled the holders on Tinkercad and received the final 3D printed models in the next session. The study's data is based on video and audio recordings of the students' observed discussions, task execution, and the pencil holders they modeled. The theoretical framework is rooted in a constructionist learning perspective, and the students' use of problem-solving strategies is categorized through Posamentier and Krulik's (2008) ten strategy types.

The results from this study show that the students used several different problem-solving strategies when faced with different problems. Eight distinct problem-solving strategies were identified in the students' work with a rich-task involving 3D printing. *Logical reasoning* was the most frequently used strategy by the students in their task execution, which may be related to its applicability in everyday situations. There were also some strategy types that the students did not use in their work. *Organizing data* and *accounting for all possibilities* were not identified, which could be related to the wording of the tasks or the students' toolbox (Schoenfeld, 2016). The significance of 3D printing in relation to how students use the strategies was also discussed, and factors such as the representations available to the students, collaboration in modeling the container, and body language and gesturing with the visual and physical representations were highlighted as meaningful for the students' use of the strategies.

To provide the reader with insight into what the teaching unit entailed and what the students modeled, we also investigated the types of holders the students modeled. Here, we highlight factors such as collaboration and discussion, and the task's potential for multiple answers as being significant for the appearance and function of the holder.

Keywords: 3D-printing, problem-solving strategies, rich task, tinkercad, constructionism.

Innholdsfortegnelse

Figuroversikt

1.0 Innledning

I dette kapittelet vil vi gjøre rede for valg av tema og presentere de aktuelle forskningsspørsmålene vi ønsker å besvare i denne oppgaven. Videre vil vi begrunne formålet med oppgaven, og belyse tidligere forskning med hva som er blitt gjort i forskningsfeltet tidligere. Til slutt vil vi beskrive oppgavens struktur.

1.1 Valg av tema

I denne oppgaven ønsker vi å se nærmere på bruk av 3D-printing i matematikkundervisning. 3D-printing er en form for digital fabrikasjon, og digital fabrikasjon er prosessen ved å lage ett digital design på datamaskinen, og gjøre det om til ett fysisk objekt (Berry et al., 2010). 3D-printeren er et additivt produksjonsverktøy som lager gjenstander ved å varme opp, og legge formbart materiale lagvis oppover, som til slutt danner et håndfast 3D-objekt (Trust & Maloy, 2017). 3D-printing er en teknologi som har vokst raskt og bruken har spredt seg utover flere industrier, i tillegg til innenfor utdanning og skole (Kit Ng et al., 2022). Også i Norge har vi erfart at 3D-printere har blitt kjøpt inn av flere skoler, som kan begrunnes med at det har omfattende bruksområder og lave kostnader (Stigberg, 2022; Trust & Maloy, 2017). Vi ønsker derfor å se nærmere på hvordan 3D-printeren kan brukes i matematikkundervisning, og hvilke implikasjoner dette kan ha for lærere og forskningsfeltet. 3D-printing blir ofte brukt i undervisningssammenheng for å få en dypere forståelse i fag, og i matematikk har det blant annet blitt brukt for å lære elever å visualisere matematiske konsepter og bevis (Ford & Minshall, 2019; Kit Ng et al., 2022). Det har også blitt brukt for å lage geometriske modeller, og geometri er ett matematisk emne der det har blitt rapportert at elevenes geometri- og romforståelse har økt ved å bruke 3D-printing aktivt i undervisningen (Ford & Minshall, 2019; Medina Herrera et al., 2019). I denne studien vil vi derfor ta utgangspunkt i geometri, og ett undervisningsopplegg der elevene jobber med volum og overflateareal av rette prismer.

Fernandes og Simoes (2022) underbygger tanken om 3D-printing som en ressurs for å få dypere forståelse i fag. De forklarer at hovedargumentene for bruken av 3D-printer i klasserommet er at det er få kreative grenser for elevene; de kan forestille seg, se, holde og teste ideene sine i virkeligheten. Krassenstein (2014) mener at 3D-printing skaper en ekstra «wow» faktor i fag som i utgangspunktet kan være kjedelig for mange og resultatet av dette kan være at elevene blir mer engasjert i undervisningen. I overordnet del av læreplan forklares det at «Skolen skal la elevene utfolde skaperglede, engasjement og utforskertrang, og la dem få erfaring med å se muligheter og omsette ideer til handling» (Kunnskapsdepartementet, 2017). Vi ser derfor på 3D-printeren som ett verktøy som kan tilrettelegge for å la elevene utforske, skape og bli engasjerte.

I matematikkfagets relevans og sentrale verdier blir det påpekt at matematikk skal forberede elever på ett samfunn og arbeidsliv i utvikling ved å gi de kompetanse i utforskning og problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kompetanse i problemløsning blir også nevnt i det tverrfaglige temaet folkehelse og livsmestring, som understreker viktigheten av å lære elever å bli problemløsere (Kunnskapsdepartementet, 2019). I ett teknologidrevet og fremtidsrettet samfunn blir utforsking og problemløsning ofte nevnt i sammenheng med 21st-century skills (Trust & Maloy, 2017). 21st-century skills blir sett på som ferdigheter og kompetanser en trenger for å bidra og lykkes i kunnskapssamfunnet i dag og i fremtiden (Van Laar et al., 2017). I en rapport av Hanover Research (2011) som sammenlignet seks store rammeverk for 21st-century skills, ble ferdigheter i problemløsning og utforsking trukket frem som to av ferdighetene som var felles for alle rammeverkene. Kritisk tenking og samarbeid ble også trukket frem som ferdigheter som var felles, og dette understreker viktigheten av disse fire ferdighetene for å forberede elever til ett samfunn og arbeidsliv i utvikling. Etter å ha intervjuet lærere som har brukt 3D-printere i deres undervisning fant Trust og Maloy (2017) ut at flesteparten mener dette promoterer elevenes læring av 21st-century skills. Vi vil derfor undersøke elevenes perspektiv, og vil avgrense studien ved at vi tar utgangspunkt i 3D-printing og problemløsning.

Som nevnt over vil vi se nærmere på elevers problemløsning når de jobber med ett undervisningsopplegg med 3D-printing. Dette er det noen ulike grunner til. For det første blir problemløsning trukket frem som ett viktig begrep i både overordnet del av læreplan og i læreplan for matematikk. Ett av kjerneelementene i matematikkfaget omhandler nettopp utforsking og problemløsning, og her blir det forklart at problemløsning i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før (Kunnskapsdepartementet, 2019). Problemløsning er som nevnt også en ferdighet som blir trukket frem av flere rammeverk i forhold til 21st-century skills. For det andre ser vi ett potensiale i utvikling av problemløsningsferdigheter når elever jobber med 3D-printing i matematikkundervisningen. Fernandes & Simoes (2022) nevner i sin artikkel at 3D-printing kan brukes til å løse hverdagslige problemer, som fører til at elevene knytter det teoretiske opp mot det praktiske, som igjen kan gi en bedre forståelse av matematikk. Matematiske opplegg med 3D-printing kan derfor ta utgangspunkt i hverdagslige og reelle problemer, som gjør at elever må benytte seg av ulike strategier for å finne en eller flere løsninger. En RIK-oppgave er ett eksempel på oppgaver som kan omhandle ett praktisk problem, og kan ha flere innfallsvinkler og løsninger. Strategiene elevene benytter seg av for å komme nærmere en løsning vil i denne studien bli kalt problemløsningsstrategier. Dette vil bli definert ytterligere i teorikapittelet (jf. 2.3).

1.2 Forskningsspørsmål

Med utgangspunkt i vår begrunnelse for valg av tema, ønsker vi å undersøke følgende forskningsspørsmål:

1. *Hvilke beholdere modellerer elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?*
2. *Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?*

I det første forskningsspørsmålet ønsker vi å se hvilke beholdere som blir modellert av elevene når de jobber med en rik oppgave. I denne studien vil modellere referere til at elevene lager en 3D-modell som skal printes ut av en 3D-printer. Ved å presentere de ulike beholderne, ønsker vi å skape et innblikk for leseren i forhold til hvordan beholderne ser ut, da 3D-printing kan være ett ukjent begrep for mange. I tillegg er det interessant for oss å se nærmere på de ulike beholdere som blir modellert av elevene. Beholdere vil i denne sammenhengen være blyantbeholdere som elevene skal modellere når de jobber med undervisningsopplegget.

Det andre forskningsspørsmålet vil være todelt. Den første delen av forskningsspørsmålet omhandler hvilke problemløsningsstrategier elevene benytter i arbeid med en rik oppgave med 3D-printer. De ulike problemløsningsstrategiene elevene bruker i arbeidet med undervisningsopplegget kan gi oss et innblikk i hvordan en rik oppgave med 3D-printing legger opp til problemløsning i matematikkundervisningen. En rik oppgave beskrives av Hedrén (2005) som en oppgave med et problem som ikke har noe bestemt svar. Det kjennetegnes ofte med at det er mulig for alle for å komme i gang med oppgaven, men har problemer som er komplekse nok til å være utfordrende for alle. Den andre delen av forskningsspørsmålet omhandler hvilken betydning 3D-printing har for hvordan elevene bruker de ulike strategiene. Dette vil knyttes opp mot *making* og konstruksjonismen, som vil bli gjort rede for i teorikapittelet (jf. 2.1).

For å besvare forskningsspørsmålene vil vi observere elever på 9. trinn som gjennomfører et undervisningsopplegg om det matematiske temaet geometri. Undervisningsopplegget innebærer at elevene skal jobbe med volum og overflateareal av rette firkantete prismer, og opplegget vil utdypes i metodekapittelet (jf. 3.4). Elevene skal jobbe med en rik oppgave i ett 3D-modelleringsprogram, der de skal modellere blyantbeholdere. Beholderne skal deretter printes ut på en 3D-printer. I observasjonen skal vi se nærmere på problemløsningsstrategiene som blir tatt i bruk av elevene når de møter på ulike problemer. Elevenes arbeid vil bli tatt opp av lyd og video. I analysen kommer vi til å ta utgangspunkt i Posamentier og Krulik (2008) sine ti problemløsningsstrategier. Strategiene vil bli definert og presentert i teorikapittelet (jf. 2.3).

Det er også viktig å få frem at de to forskningsspørsmålene vil vektlegges ulikt. Det første forskningsspørsmålet vil undersøkes for å gi leseren en innsikt i hva elevene har modellert og ytterligere skape en kontekst rundt utdragene av deres diskusjoner i møte med problemer. Det vil altså si at det andre forskningsspørsmålet vil prioriteres i analysen og i diskusjonen, ettersom studiens hovedfokus vil være på elevenes problemløsningsstrategier i arbeid med 3D-printing.

1.3 Oppgavens formål

Hovedsakelig tenker vi at forskningen vil være nyttig for skolen og lærere. Ønskelig vil forskningen kunne gi innsikt i hvordan 3D-printing kan brukes i matematikkundervisning, som kan veilede skoler og lærere i hvordan teknologien kan benyttes. Ettersom vi allerede har erfart flere skoler som har gått til innkjøp av en 3D-printer, kan studien være relevant for lærere og skoler som ønsker å ta teknologien i bruk. Videre tenker vi at forskningen kan være nyttig for utdanning av lærerstudenter ved at vi belyser en innovativ måte å jobbe med matematikk, og hvordan dette eventuelt kan tilrettelegge for at elever jobber med problemløsning. Studien kan også være nyttig ved at vi reflekterer rundt tidligere forskning og elevenes arbeid med vårt undervisningsopplegg, og drøfter hvilke implikasjoner dette kan ha for lærere og videre forskning.

1.4 Tidligere forskning

Det er begrenset med forskning på bruk av 3D-printing i sammenheng med problemløsningsstrategier i matematikkundervisning. Det er på den andre siden flere studier som trekker frem at digital fabrikasjon og 3D-printing tilrettelegger for utvikling av problemløsningsferdigheter (Bicer et al., 2017; Blikstein, 2013; Ng & Chan, 2019). Ettersom elevene skal jobbe med ett undervisningsopplegg om geometri, vil det være relevant å belyse hva som har blitt gjort og funnet ut om 3D-printing og geometri i matematikkundervisning tidligere. Elevene skal jobbe med undervisningsopplegget sammen i grupper, og det vil derfor også være aktuelt å trekke frem tidligere forskning på 3D-printing og samarbeid. Elevene vil jobbe med ulike typer representasjoner i deres arbeid med opplegget, og det vil derfor også være relevant å belyse tidligere forskning om representasjoner og problemløsning. Vi ønsker altså å fremheve hva som har blitt gjort tidligere, for å plassere vår studie i en kontekst.

I studien til Medina Herrera et al. (2019) lagde de 3D-printede objekter for å lære lærerstudenter om geometri. I denne studien skulle studentene utforske ett tredimensjonalt objekt, finne en likning for de ulike overflatene som definerte objektet og finne overflatearealet og volumet. De fant ut at tredimensjonale verktøy som 3D-printing kan utvikle romforståelse og evnen til å visualisere tredimensjonale objekter. I tillegg argumenterer de for at 3D-printede objekter tilfører en ekstra sans i arbeidet med tredimensjonalitet i matematikkundervisningen: berøringssansen.

Corum og Garofalo (2015) brukte digital fabrikasjon for å lære elever om overflateareal og volum. I denne studien lagde elever en tredimensjonal modell av en kube i Modelmaker, som er ett CAD-modelleringsprogram som kan sammenlignes med Tinkercad. De lagde så en modell av kuben som ett todimensjonalt objekt, altså hvordan kuben ville se ut om alle overflatene var brettet ut. Etter å ha gjennomført en pretest og posttest fant de ut at elevenes prestasjoner i oppgaver som omhandlet overflateareal hadde en stor forbedring etter å ha vært gjennom prosjektet. I tillegg argumenterer de for at elevene som deltok i studien hadde mulighet til å utvikle gode strategier for å løse oppgavene om overflateareal. På den andre siden trekker de frem at de ikke hadde noen kontrollgruppe, eller intervjuet noen elever i etterkant som begrensninger i deres studie.

I vår studie vil elevene jobbe sammen i deres arbeid med undervisningsopplegget, og det er også blitt gjort studier som utforsker hvordan elever samarbeider i arbeid med 3D-printing. Kit Ng et al. (2022) identifiserte en trend i samarbeidsbaserte læringsaktiviteter som involverte prosjekt eller problembasert læring i deres litteraturgjennomgang av 3D-printing i matematikkundervisning. Denne tilnærmingen kan legge opp til at elever får muligheter til å modellere deres 3D-modeller i team, og visualisere og utforske matematiske ideer, slik at de kan anvende og konstruere kunnskap sammen (Ng & Chan, 2019). Pearson og Dubé (2022) trekker også frem i deres litteraturgjennomgang at 3D-printing tilrettelegger for muligheten til å jobbe sammen i team, og for at elever blir aktive i sin egen læring. Elevene vil derfor jobbe i grupper i denne studien, med tanke på at tidligere forskning trekker frem hvordan 3D-printing kan tilrettelegge for samarbeid.

Det er også blitt forsket på hvordan erfaring og utforsking med ulike representasjoner kan hjelpe elever med å få en dypere forståelse av matematiske konsepter og tilrettelegge for de kognitive prosessene i problemløsning. (DeBellis & Goldin, 2006; Hwang et al., 2009; Kilpatrick et al., 2001). I en studie gjennomført av Kilpatrick et al. (2001) blir det argumentert for at kombinasjonen av ulike representasjoner i matematikkundervisning forbedrer elever sine problemløsningsferdigheter. Dette kommer av at de lærer å tilpasse seg ulike representasjoner og strategier for å løse matematiske utfordringer.

I matematikken er det en vid enighet om at elever skal være i stand til å løse oppgaver ikke bare raskt og riktig, men også kunne tilpasse seg den. For eksempel ved å anvende ulike strategier og representasjoner, og ta hensyn til fagets og oppgavens kjennetegn (Baroody & Dowker, 2013; Kilpatrick et al., 2001; Verschaffel et al., 2009). Strategier ser vi på som problemløsningsstrategier, og representasjoner vil være ulike måter å utrykke matematiske ideer (Duval, 1999). Med tanke på at vi skal gjennomføre et undervisningsopplegg innenfor 3D-printing vil elevene bruke både visuelle og fysiske representasjoner for å utrykke deres matematiske ideer.

I norsk sammenheng finnes det svært lite forskning på 3D-printing i matematikkundervisning. Med vår studie ønsker vi å bidra i dette forskningsfeltet, og da særlig i en norsk kontekst. Derfor vil vi knytte våre funn opp mot tidligere internasjonal forskning, og diskutere hvilke implikasjoner dette kan få for lærere.

1.5 Oppgavens struktur

Oppgaven er strukturert i 9 kapitler. Kapittel 1 introduserer bakgrunnen for valg av tema og forskningsspørsmålene, i tillegg til å gi en kort oversikt over oppgavens formål og tidligere forskning. Kapittel 2 er en gjennomgang av det teoretiske rammeverket i denne studien som inneholder læringsteorien konstruksjonisme, problemløsning og problemløsningsstrategier. I kapittel 3 beskriver vi metoden for datainnsamling og utvalget som er benyttet, samt undervisningsopplegget elevene har gjennomført. Etiske hensyn og analyseprosessen blir også omtalt, og kapittelet avsluttes med en drøfting av kvalitet i studien. Kapittel 4 presenterer funnene fra analysen og er delt inn i to deler: del 1 omhandler den første gjennomføringen, mens del 2 fokuserer på den andre. I kapittel 5 blir funnene fra analysen drøftet i lys av det teoretiske rammeverket og tidligere forskning. Videre følger en kort sammenfatning og konklusjon på forskningsspørsmålene i kapittel 6. I kapittel 7 vil vi drøfte hvilke implikasjoner studien kan ha for lærere og videre forskning. Til slutt inneholder kapittel 8 og 9 henholdsvis referanselisten, og vedlegg.

2.0 Teori

I dette kapitlet vil vi presentere det teoretiske rammeverket som ligger til grunn for hvordan vi skal svare på forskningsspørsmålene: «*Hvilke beholdere lager elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?*» og «*Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?*» Her vil vi først redegjøre for konstruksjonismen, som er vårt gjennomgående perspektiv på læring i denne studien. Dermed vil vi utdype hvordan vi forstår problemløsning, ved å sammenligne ulike historiske forståelser av begrepet. Til slutt vil vi trekke frem tidligere forskning på problemløsningsstrategier, og redegjøre for problemløsningsstrategiene som vil bli brukt som vårt konseptuelle rammeverk i dataanalysen. Det teoretiske rammeverket vil bli brukt for å forstå dataen vi innhenter fra observasjonen, og som ett grunnlag for å diskutere resultater og funn.

2.1 Konstruksjonisme

Konstruksjonismen er en læringsteori som bygger videre på Piaget sin konstruktivisme, og handler om at læring konstrueres bemerkelsesverdig godt når elever bygger, lager og deler objektene sine med omverden (Papert & Harel, 1991). Seymour Papert har vært en av pionerene bak bruken av digitale verktøy i undervisning og er opphaveren til konstruksjonismen som en læringsteori (Blikstein, 2013). Papert uttrykker forholdet mellom Piaget sin konstruktivisme og konstruksjonismen slik:

> "Constructionism--the N word as opposed to the V word--shares constructivism's connotation of learning as "building knowledge structures" irrespective of the circumstances of the learning. It then adds the idea that this happens especially felicitously in a context where the learner is consciously engaged in constructing a public entity, whether it's a sand castle on the beach or a theory of the universe.» (Papert & Harel, 1991, s. 1)

N-ordet (Konstruksjonismen) bygger altså videre på V-ordet (Konstruktivismen) ved å understreke at nøkkelen til læring ligger i å konkretisere og uttrykke egne ideer og tanker, og dele det med omverden. Å uttrykke ideer som noe konkret vil gjøre de håndfaste og delbare, som vil føre til at de blir formet og spisset inn, og dette vil i sin tur hjelpe til at vi kan uttrykke og kommunisere ideer med andre for å fremme læring og forståelse (Ackermann, 2001). Blikstein (2013) legger vekt på at i ett typisk konstruksjonistisk læremiljø vil det sjeldent være en fastsatt læreplan, men heller elevene som bruker teknologi for å lage prosjekter, og lærerne som veileder og tilrettelegger for prosessen. 3D-printeren vil være ett verktøy som passer godt inn i ett slikt læringsmiljø, og Kit Ng et al. (2022) trekker frem flere studier i sin litteraturgjennomgang som hadde en *«learning by making»* eller med andre ord en konstruksjonistisk tilnærming. *Making* vil i denne studien defineres som å bruke teknologi for å uttrykke en idé som noe konkret og virkelig. Kit Ng et al. (2022) forklarer at 3D-printing er en form for *making* som styrker elevers evne til å koble sammen kunnskapsområdene matematikk og 3D-printing, og gjør at de kan uttrykke matematiske konsepter som noe fysisk og konkret. En *making*-kultur legger til rette for å ta risikoer, å lære av feilene sine, problemløsning og utviklingen av utholdenhet når oppgaver er vanskelige (Hughes et al., 2017). Ng og Ferrara (2020) trekker også frem viktigheten av samarbeid i en *making*-kultur, der elever konstruerer matematisk forståelse med andre gjennom kroppsspråk og gestikuleringer i arbeid med konkreter de lager.

Tankene om at læring konstrueres av individet gjennom personlige erfaringer er ett fellestrekk mellom Papert sin konstruksjonisme og Piaget sin konstruktivisme. Både Piaget og Papert ser på kunnskap som noe mer enn en ressurs som skal bli overført, kodet, beholdt og gjenbrukt, men som en personlig erfaring som skal bli konstruert (Ackermann, 2001). Som forklart tidligere er tankene bak konstruksjonismen at kunnskapen blir konstruert når man lager noe og deler det med omverden, og det vil være ulike tilnærminger til hvor nære tankene er til objektene en har lagd. Papert og Harel (1991) kaller dette *nærhet til objekter*[1] og dette handler om at noen foretrekker måter å tenke på som holder seg tett inntil de fysiske objektene, mens andre bruker abstrakte og formelle måter å tenke på som distanserer de fra det konkrete materialet. Dette kan knyttes til matematikken, der noen foretrekker en mer praktisk tilnærming der de forholder seg til hverdagslige situasjoner og noe konkret. Andre foretrekker å tenke på matematikken som noe abstrakt og formelt, og distansere seg fra det praktiske og konkrete. Papert (1972) trekker også frem ett annet aspekt med konstruksjonismen, som handler om å styrke ens muligheter til refleksjon ved å gå tilbake å fikse opp feil og

[1] Oversettelse av *«closeness to objects» fra Papert & Harel (1991).*

rekonstruere objektet. Gjennom denne konstante prosessen der en går frem og tilbake mellom den abstrakte og visuelle representasjon på 2D-skjermen til den fysiske representasjonen i form av 3D-objektet, vil elever kunne starte å se sammenhengen mellom de ulike måtene å tenke på (Huang & Lin, 2017; Smith, 2018). Huang og Lin (2017) argumenterer også for at denne prosessen kan utvikle ferdigheter i visualisering, og forberede elevers evne til å visualisere hvordan det tiltenkte objektet vil se ut i virkeligheten.

2.2 Problemløsning

Forskning på problemer og problemløsning har historisk sett hatt flere og ofte motsigende definisjoner (Schoenfeld, 2016). Dette blir synlig i litteraturen, der det har vært flere måter å forstå problemløsning opp gjennom årene. Stanic og Kilpatrick (1989) foreslår tre generelle temaer som karakteriserer den historiske rollen til problemløsning i matematikkundervisning.

Problemløsning som kontekst handler om å ta i bruk problemer for å rettferdiggjøre å lære matematikk i skolen (Stanic & Kilpatrick, 1989). Dette blir gjort ved at problemer knyttes til hverdagslige situasjoner og den virkelige verden. På denne måten kan elever bli overbevist over verdien til matematikkfaget, og bli motivert til å lære om nye temaer (McIntosh et al., 2000). Problemer blir derfor ofte brukt som en morsom aktivitet, som både varierer matematikkundervisningen og gir elever mulighet til å bruke det de har lært i en annen kontekst. Schoenfeld (2016) argumenterer for at problemløsning i denne forståelsen ikke blir ett mål i seg selv, men at det tilrettelegger for å nå andre mål i matematikken.

Problemløsning som ferdighet er det andre temaet som blir trukket frem av Stanic og Kilpatrick (1989). I denne forståelsen blir problemløsning sett på som en egen ferdighet i matematikkundervisningen, der elever skal lære teknikker og strategier for å løse kjente og ukjente problemer (Stanic & Kilpatrick, 1989). Eksempler på strategier kan være å tegne en figur, jobbe bakover eller å lage en liste, og ved å gi elevene påfølgende problemer til strategiene får elevene mulighet til å øve og mestre de ulike. Ifølge Schoenfeld (2016) skal disse strategiene, sammen med fakta og prosedyrer de har lært, gi elever en *verktøykasse* de kan bruke når de møter på ukjente problemer. Schoenfeld (1980) argumenterer for at de ulike strategiene kan bli sett på som nøkler, og ett problem kan bli sett på som en lås. Antallet nøkler kan være mange, og det vil bare være noen få som kan «åpne» problemet. Å prøve nøkler uten mål og mening vil være tidkrevende og ikke mye til hjelp. På den andre siden vil det være en større mulighet for suksess dersom en utvikler en strategi for å avgrense hvilke nøkler som er mulige kandidater for å «åpne» problemet (Schoenfeld, 1980).

Problemløsning som kunst er det siste temaet som blir trukket frem av Stanic og Kilpatrick (1989) og i kontrast til de første to handler det om at problemløsning er selve hjertet av matematikken. Pólya blir trukket frem av Schoenfeld (2016) som den mest kjente matematikeren innenfor konseptualisering av matematikk som problemløsning og for hans arbeid med å skape ett fokus på problemløsning som kunst. I boka *How to solve it?* trekker Pólya (1945) frem en liste av mentale operasjoner for å forstå og løse ett problem:

1. Å forstå problemet (Understanding a problem)
2. Lage en plan (Devising a problem)
3. Å utføre planen (Carrying out a plan)
4. Å verifisere (Looking back)

Pólya kalte disse mentale operasjonene for heuristikker, og dette definerer han som studien av midler og metoder for problemløsning, læring og oppdagelse som vil styrke ens evne til å løse problemer (Pólya, 1945). Schoenfeld (1985) forklarer at heuristiske strategier er retningslinjer for suksessfull problemløsning, og generelle forslag som hjelper individer med å forstå et problem eller for å komme nærmere en løsning. Målet med å lære problemløsning som kunst vil derfor være å lære elever å bli selvstendige, utforskende og entusiastiske problemløsere, som vil være i stand til å møte åpne og utfordrende problemer (McIntosh et al., 2000).

Ett annet vesentlig aspekt ved problemløsning handler om hvem det er som skal løse problemet. Et *problem* er et dynamisk begrep som vil være betinget av personen som skal løse det (Mason & Davis, 1991). Med andre ord så vil ikke ett *problem* for én person, nødvendigvis være et problem for en annen. Det vil også bety at et problem for en elev ikke trenger å være et problem for den samme eleven på ett senere tidspunkt (Torkildsen, 2017). Torkildsen (2017) trekker også frem at undervisning i problemløsning krever at elevene får en utfordring de ikke umiddelbart vet hvordan de skal løse, og får tid til å utforske og «leke» med problemet.

Problemløsning i matematikk kan altså ses på som ett omfattende begrep som blir forstått på flere ulike måter. Vi vil legge oss nærmere en forståelse av problemløsning som både kunst og ferdighet i denne studien, og ser det som nødvendig å skille mellom problemløsning og problemløsningsstrategier. Mason og Davis (1991) forklarer problemløsning som en prosess, der problemløseren umiddelbart ikke ser løsningen eller svaret på problemet. På samme måte som Mason og Davis (1991) og Pólya (1945) ser vi på problemløsning som en prosess, og heuristiske strategier som ett middel for å komme nærmere en løsning på ett problem. Vi anser også problemløsning som en ferdighet, som Stanic og Kilpatrick (1989) forklarer ved at elever lærer ulike strategier og teknikker for å løse kjente og ukjente problemer. Problemløsning som kunst vil derfor ses på som hele prosessen når man møter på ett kjent eller ukjent problem, imens ferdighetene i problemløsning vil være problemløsningsstrategiene en benytter i prosessen for å komme nærmere en løsning.

2.3 Problemløsningsstrategier

Posamentier og Krulik (2008) argumenterer for at essensen i problemløsning er å finne og velge en egnet strategi som passer til problemet og ressursene man har tilgjengelig. Dette kan minne om forståelsen *problemløsning som ferdighet*, der en benytter strategier i problemløsningsprosessen for å komme nærmere en løsning. Flere forskere har definert ulike sett med strategier som benyttes i matematikken (Se f. eks. Gallagher & De Lisi, 1994; Larson, 2012; Posamentier & Krulik, 2008). Sammenligner man disse strategisettene blir det tydelig at flere av de samme strategiene går igjen hos de ulike forskerne, men under ulike betegnelser. Flere forskere (Se f.eks. Gallagher & De Lisi, 1994; Larson, 2012; Posamentier & Krulik, 2008) påpeker at problemer i matematikk ofte kan løses på forskjellige måter, og derfor er det som oftest ikke én bestemt strategi som bør benyttes for å løse et problem. Det innebærer også at det er svært sjeldent at alle de ulike strategiene kan anvendes på det samme problemet (Gallagher & De Lisi, 1994; Larson, 2012; Posamentier & Krulik, 2008).

Posamentier og Krulik (2008) presenterer ti strategier som de anser som verdifulle i matematikkundervisningen. Vi vil ta utgangspunkt i disse strategiene i analysearbeidet. Forklaringene på de ulike strategiene blir av Posamentier og Krulik (2008) knyttet opp mot dagligdagse problemer og forklart på en forståelig måte, gjorde at vi valgte å bruke deres strategier som verktøy i analysen. Under kommer en liste med vår oversettelse av strategiene, i tillegg til de originale benevningene.

1. Jobbe bakover *(Working backwards)*
2. Se fra en annen synsvinkel *(Adopting a different point of view)*
3. Se etter mønstre *(Finding a pattern)*
4. Forenkle problemet *(Solving a simpler analogous problem)*
5. Vurdere ekstreme tilfeller *(Considering extreme cases)*
6. Visuell representasjon *(Making a drawing or visual representation)*
7. Gjett og sjekk *(Intelligent guessing and testing)*
8. Organisere Datamaterialet *(Organizing data)*
9. Gjøre rede for alle muligheter *(Accounting for all possibilities)*
10. Logisk resonnement *(Logical reasoning)*

Videre i kapittelet kommer en redegjørelse av hver enkel strategi. Noen av strategiene vil bli utfylt med annen teori for å dekke begrepene ytterligere.

2.3.1 Jobbe Bakover

Problemløsningsstrategien å *jobbe bakover*, innebærer å starte med det ønskede resultatet og deretter finne ut hvilke steg som skal til for å oppnå dette resultatet (Posamentier & Krulik, 2008). Den generelle strukturen som ligger til grunn for å *jobbe bakover* handler om å jobbe seg fra en konklusjon til premissene for konklusjonen (Croy, 2000). Denne tilnærmingen kan være nyttig i situasjoner der problemløseren er usikker på hvordan han skal gå frem, eller der problemet virker for komplekst til å løses på en enkel måte (Posamentier & Krulik, 2008). Det kan derfor se ut som at å *jobbe bakover* krever en annen tankegang enn den tradisjonelle problemløsningsmetoden elever er vant til å bruke. I stedet for å følge en fast prosedyre må problemløseren tenke kreativt og strategisk for å finne løsning på problemet (Posamentier & Krulik, 2008). Å *jobbe bakover* kan derfor være en fordel når det er en unik løsning som skal finnes, og det finnes ulike måter å komme frem til startpunktet på. Men vanligvis er det å jobbe i den «naturlige» retningen, altså fremover, den mest vanlige måten å løse problemer på. Ofte vil strategien å *jobbe bakover* bli tatt i bruk etter man har prøv den «naturlige» tilnærmingen (Posamentier & Krulik, 2008). Et eksempel på en oppgave der å *jobbe bakover* kan være nyttig, blir presentert under (Posamentier & Krulik, 2008, s. 23):

Problem 1

Peter har en 11-liters kanne og en 5-liters kanne. Hvordan kan han måle akkurat 7 liter vann?

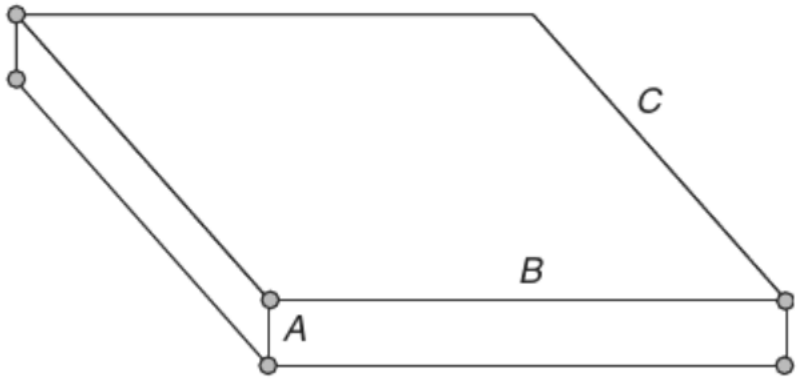
I denne oppgaven er det vanlig at elever begynner å helle frem og tilbake, i et forsøk for å komme frem til svaret. Det vil beregnes som en uorganisert gjett og sjekk metode. I midlertidig kan problemet løses på en mer organisert måte ved hjelp av strategien *jobbe bakover*. Målet med problemet er å ende opp med 7 liter vann i 11-liters kannen, men i stedet for å finne en måte å fylle 7 liter vann, velger vi nå å finne ut hvordan vi kan måle 4 liter, som er det som mangler for å fylle opp 11-liters kannen når det er 7 liter i den. Videre må vi derfor finne en måte å måle 4 liter. For å finne det må vi fylle 11-liters kannen full, for å så fylle opp 5-liters kannen to ganger. Da sitter vi igjen med 1 liter i 11-liters kannen, som må helles over i 5-liters kannen. Nå må vi fylle opp 11-liters kannen og helle de resterende 4 literne i 5 liters kannen, slik at den blir full, fra 11 liters kannen, det vil da være 7 liter igjen i 11-liters kannen, og problemet er løst.

2.3.2 Se fra en annen synsvinkel

Den typiske opplæringen elever får på skolen, gir de en grunnleggende forberedelse på å løse problemer på en enkel og «rett frem» metode (Posamentier & Krulik, 2008). Dette kan føre til en løsning, men ikke alltid på den mest effektive måten. Når en elev prøver å løse et problem på en bestemt måte og ikke finner løsningen, vil han eller hun sannsynligvis prøve å løse problemet på akkurat samme måte, og etter gjentatte forsøk vil ofte eleven gi opp (Posamentier & Krulik, 2008). Derfor kan det være en fordel å prøve å se problemet fra en annen synsvinkel. Problemløsningsstrategien *se fra en annen synsvinkel* handler om å se på problemet fra et annet perspektiv enn det man først prøvde (Posamentier & Krulik, 2008). Et eksempel på en oppgave der problemløsningsstrategien *se fra en annen synsvinkel* kan være nyttig, blir presentert under (Posamentier & Krulik, 2008, s. 89).

Problem 2

Et rektangulært prisme har overflatene 165cm^2, 176cm^2 og 540cm^2, hva er volumet av prismet?



En måte å løse dette problemet på er ved å lage tre forskjellige ligninger, hvor hver av disse ligningene vil representere en av overflatene. Deretter kan man løse ligningene for å finne de tre dimensjonene i prismet, for å så multiplisere disse for å finne volumet. Men hvis det er en løsning som er for komplisert, kan man *se problemet fra en annen synsvinkel* og tenke at vi ikke har fått oppgave å finne de nøyaktige sidene, men heller finne hele volumet til prismet. Derfor kan man se problemet på en annen måte, og gjøre som følger:

$$V = \mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b} \text{ x } \mathbf{c}$$

$$V^2 = \mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b} \text{ x } \mathbf{c} \text{ x } \mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b} \text{ x } \mathbf{c}$$

$$V^2 = (\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b}) \text{ x } (\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{c}) \text{ x } (\mathbf{b} \text{ x } \mathbf{c})$$

$$V^2 = 165 \text{ x } 176 \text{ x } 540$$

$$V = \sqrt{165x175x540}$$

$$V = 3690\text{cm}$$

2.3.3 Se etter mønster

Se etter mønster er en strategi som går ut på å enten finne et mønster eller utvide et mønster for å finne svaret på et problem (Posamentier & Krulik, 2008). Mønstre kan ofte for sees i sammenheng med geometrien, men Posamentier og Krulik (2008) mener at det finnes mønstre i flere matematiske temaer. Videre argumenterer de for at om man klarer å hente ut mønstrene i matematiske problemer, kan man bruke denne informasjonen til å beskrive regelmessigheter på en mer tilgjengelig måte (Posamentier & Krulik, 2008). Torkildsen

(2017) trekker frem at det å lete etter mønster ofte kombineres med andre strategier. Et eksempel på et problem der *se etter mønster* kan være nyttig, blir presentert under:

Problem 3

Finn summen av de 20 første oddetallene

Det 20. oddetallet er 39, og vi vil finne summen av alle oddetall mellom 1 og 39. I stedet for å skrive ned alle oddetallene eller bruke en kalkulator, kan vi *se etter et mønster*. Vi kan legge merke til at det første og siste oddetallet (1 og 39) addert sammen bli 40, og det samme gjør det andre og nest siste oddetallet (3 og 37), og så videre. Dette mønsteret vil gjenta seg for hvert par med oddetall. Siden det er 20 oddetall mellom 1 og 39, vil det være 10 par med oddetall. Hvert par blir 40, så vi kan multiplisere 40 med antall par (10), og få svaret 400. Denne strategien for å se etter mønster kan være nyttig i andre matematiske problemer også, spesielt når det gjelder tallrekker eller mønstre.

2.3.4 Forenkle problemet

Et problem kan være komplekst, forvirrende og inneholde mye informasjon, noe som kan gjøre det utfordrende å finne ut hvor man skal starte for å finne en løsning på problemet (Posamentier & Krulik, 2008). Problemløsningsstrategien *forenkle problemet* innebærer å endre et komplekst problem til en enklere og mer håndterlig form (Posamentier & Krulik, 2008). Dette kan gjøres ved å bryte problemet ned i mindre deler, fjerne unødvendige detaljer, eller gjøre noen antagelser for å redusere problemets kompleksitet. Målet er å gjøre problemet lettere å forstå og løse, samtidig som man beholder det viktigste aspektet av problemet. Under kommer et eksempel hvor det kan være hensiktsmessig å anvende *forenkle problemet* (hentet fra Posamentier & Krulik, 2008, s. 112):

Problem 4

Basketballaget deltar i en straffekastkonkurranse. Den første spilleren scoret x straffekast. Den andre skytteren scoret y straffekast. Den tredje skytteren klarte det samme antallet straffekast som gjennomsnittet av antall straffekast scoret av de to første skytterne. Hver påfølgende skytter i konkurransen scoret gjennomsnittet av antall straffekast utført av alle de foregående skytterne. Hvor mange straffekast klarte den tolvte spilleren?

Noen elever kan prøve å løse dette problemet ved å regne ut gjennomsnittet for hver av de 12 spillerne etter tur. Dette tar en del tid og det er enkelt å gjøre feil i de algebraiske utregningene. I stedet kan strategien *forenkle problemet* anvendes ved at vi bytter ut x og y, med enkle tall og ser hva som skjer. La oss si at den første spilleren scoret 8 straffekast (x) og den andre scoret 12 straffekast (y). Den tredje spillerens poengsum vil være gjennomsnittet av de to første, altså $\frac{8+12}{2} = 10$. Den fjerde spilleren vil da ha poengsum lik gjennomsnittet av de tre første spillerne, som er $\frac{8+12+10}{3} = 10$. På samme måte vil den femte spilleren ha en poengsum som er gjennomsnittet av fire første som da blir $\frac{40}{4} = 10$. Vi kan da se at poengsummen til alle spillerne etter de to første, vil være gjennomsnittet av poengsummen til de første spillerne. Overfører vi dette til det opprinnelige problemet, vil løsningen bli slik; $\frac{x+y}{2}$. Så ved å løse det enklere problemet, fant vi løsningen på det opprinnelige problemet.

2.3.5 Vurdere ekstreme tilfeller

Å vurdere ekstreme tilfeller innebærer å erstatte variabler i et problem med høye eller lave verdier (Posamentier & Krulik, 2008). Ved å holde noen variabler konstante og endre andre til ytterpunktene, kan vi ofte få verdifull innsikt i problemet (Posamentier & Krulik, 2008). Det er viktig å påpeke at om vi vurderer ekstreme tilfeller, må man være forsiktig med å endre variablene, ettersom det kan påvirke problemet i sin helhet. Posamentier og Krulik (2008) påpeker at "worst-case scenario", som handler om at man skal tenke seg det verste tilfellet som er mulig i den situasjonen man er i, er ett eksempel en kan kjenne igjen fra dagliglivet som illustrerer konseptet med å vurdere ekstreme tilfeller. Under kommer et eksempel hvor *vurdere ekstreme tilfeller* blir anvendt (hentet fra: Posamentier & Krulik, 2008, s. 121).

Problem 5

I en skuff er det 8 blå, 6 grønne og 12 svarte sokker. Uten å se, hva er minste antall sokker du må ta med deg for å være sikker på at du får ett par med svarte sokker?

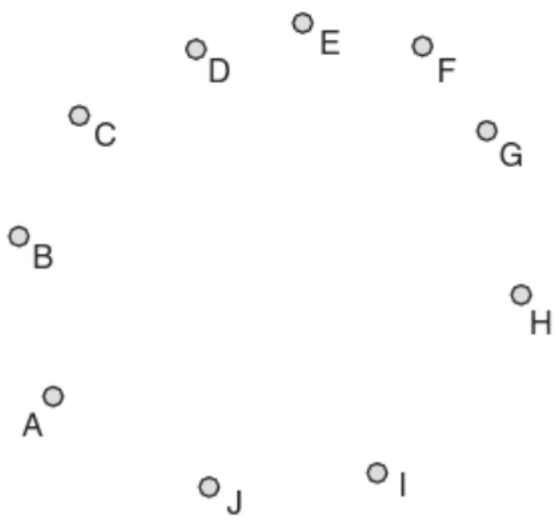
Dette problemet handler om å plukke to tilfeldige sokker fra en haug med sokker, der målet er å få to svarte sokker. For å finne ut hvor mange sokker vi må velge før vi kan være sikre på å få to svarte sokker, kan vi tenke på «worst-case scenario». «Worst-case scenarioet» ville være å velge alle de blå og grønne sokkene før vi velger en svart sokk, men når vi da trekker er vi sikre på at sokkene er svarte siden det ikke er flere igjen av de andre sokkene. I dette scenarioet måtte vi velge 16 sokker før vi var sikre på å få to svarte sokker. Selv om vi kanskje får to svarte sokker tidligere, er det ikke garantert, og det ville være veldig uvanlig. Selv om vi velger 10 sokker tilfeldig, kan vi ikke være sikre på at vi får to svarte sokker blant dem.

2.3.6 Visuell representasjon

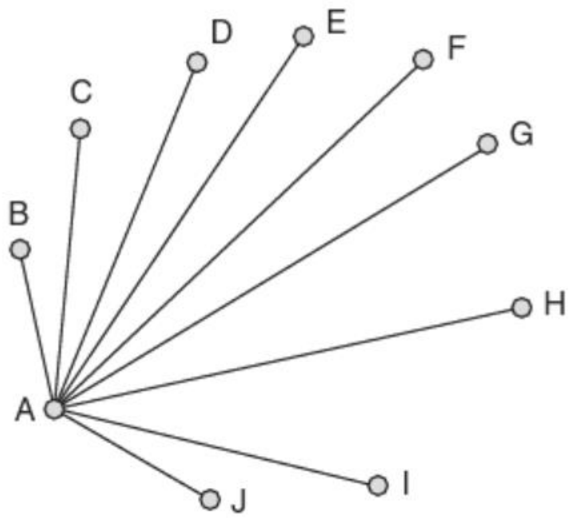
Visuell representasjon er en problemløsningsstrategi som innebærer å bruke visuelle hjelpemidler som tegninger, figurer, diagrammer eller tabeller, for å representere eller organisere informasjon i et problem (Posamentier & Krulik, 2008). Dette kan hjelpe med å gjøre komplekse problemer enklere å forstå, noe som kan føre problemløseren nærmere en løsning på problemet. Posamentier og Krulik (2009) poengterer at noen elever vil lære lettere ved å visualisere seg problemet man står ovenfor, og at strategien kan være en god strategi for alle som prøver å forstå et problem. I problemet under blir *visuell representasjon* anvendt (hentet fra Posamentier & Krulik, 2008, s. 11).

> **Problem 6**
>
> I et rom med 10 mennesker, skal alle hilse på hverandre en gang. Hvor mange håndtrykk blir det totalt?

For å løse dette problemet kan vi å benytte oss av en *visuell representasjon*. En mulig løsning kan være å tegne et diagram med 10 prikker, hvor hver prikk representerer en person:



Vi begynner med person markert A, og setter strek til hver av de 9 andre i rommet, som viser at det blir 9 håndtrykk. Videre kan man tegne streker fra prikk til prikk, frem til alle har hilst på alle.



Videre fra punkt B vil det nå være 8 mulige håndtrykk, da B ikke kan hilse på A igjen. Fortsetter man sånn vil C få 7 streker, D få 6 streker Osv. Til slutt vil det være I som kun trenger å hilse på J, siden I allerede har hilst på de andre. Regnestykket blir derfor 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 håndtrykk.

2.3.7 Gjett og sjekk

Denne problemløsningsstrategien blir referert til av Posamentier og Krulik (2008) som intelligent gjetting og testing, da de mener gjett og sjekk er en oversimplifisering av strategien. Problemløsningsstrategien *gjett og sjekk* går ut på å løse problemet ved å prøve forskjellige løsninger og deretter evaluere om løsningen fungerte eller ikke (Posamentier & Krulik, 2008). For eksempel kan det være at en vet volumet på et prisme, men ikke vet hvor lange sidelengdene er. Dermed kan en gjøre gjetninger på hvor lange sidene er, frem til en har riktig volum. Strategien innebærer å gjøre en gjetning, teste denne gjetningen mot problemet, og deretter justere gjetningen basert på resultatet (Posamentier & Krulik, 2008). Denne prosessen vil bli gjentatt til problemet er løst. Under kommer et problem som kan løses med strategien *gjett og sjekk* (hentet fra Posamentier & Krulik, 2008, s. 184):

> **Problem 7**
>
> To positive heltall har 5 som differanse. Hvis du adderer kvadratrøttene til tallene, blir summen 5. Hva er de to heltallene?

En tradisjonell måte å løse dette på er ved hjelp av et ligningssett. Men det kan løses på en enklere måte ved å bruke strategien *gjett og sjekk*. Vi vet at summen av kvadratrøttene til tallene skal være 5. Her er det ikke mange muligheter, det må enten være 1 og 4, eller 2 og 3. Dette fører oss videre til å se på summen av heltallene som henholdsvis blir 1 og 16, eller 4 og 9. Da differanse skulle være 5, blir 4 og 9 de riktige heltallene.

2.3.8 Organisere datamateriale

Problemløsningsstrategien *organisere datamateriale* innebærer å samle, sortere og presentere data på en måte som gjør at problemet blir lettere å forstå og kan lede til en løsning (Posamentier & Krulik, 2008). Posamentier og Krulik (2008) trekker frem *organisere datamateriale* som en strategi som brukes i hverdagslivet, ved å lage handleliste, sette i oppvaskmaskinen eller andre virkårlige sorteringer etter kategorier. For at denne strategien skal hjelpe til med å løse et problem, må man organisere og se dataen på en annen måte enn den allerede blir presentert på. Reorganiseringen av datamaterialet kan være både visuell, eller rett og slett bare være en alternativ måte å se situasjonen på (Posamentier og Krulik, 2008). Under kommer et eksempel på et problem der strategien *organisere datamaterialet* blir anvendt (hentet fra Posamentier & Krulik, 2008, s. 210)

> **Problem 8**
>
> Regn ut: 20 – 19 + 18 – 17 + 16 – 15 + 14 – 13 + 12 – 11+10

I stedet for å regne ut hele regnestykket i et, kan man dele opp regnestykket i mindre regnstykker slik at man lettere kan legge sammen hele summen:

$$(20-19) + (18-17) + (16-15) + (14-13) + (12-11) =$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Ved å organisere datamaterialet på en annen måte ble det presentert et enklere regnstykke, som en kan regne ut med hoderegning.

2.3.9 Gjøre rede for alle muligheter

Posamentier og Krulik (2008) omtaler strategien *gjøre rede for alle muligheter,* som en effektiv måte å løse et problem. Strategien går ut på at man for eksempel lager en liste eller en tabell med alle mulige utfall for problemet, uansett om de er realistiske eller ikke (Posamentier & Krulik, 2008). Deretter går man igjennom de ulike løsningene og se hvilket utfall som passer best. Det er tilfeller hvor denne strategien ikke er den mest avanserte strategien, men kan være den som er enklest å bruke, siden den vanligvis ikke er veldig abstrakt (Posamentier og Krulik, 2008). Under kommer ett eksempel på ett problem der å *gjøre rede for alle muligheter* kan brukes til å løse problemet.

Problem 9

Et rektangel er delt inn i seks kvadrater med lik sidelengde. Hva er alle mulige kombinasjoner av rektangelets dimensjoner?

Tenk først på situasjonen der rektangelet har en høyde som består av én kvadratsidelengde og en bredde som består av seks kvadratsidelengder. Dette gir rektangelets dimensjoner som (1, 6), der 1 er antall kvadrater i høyden og 6 er antall kvadrater i bredden. Nå vurder situasjonen der rektangelet har en høyde som består av to kvadratsidelengder og en bredde som består av tre kvadratsidelengder. Dette gir rektangelets dimensjoner som (2, 3), der 2 er antall kvadrater i høyden og 3 er antall kvadrater i bredden. Det er disse to tilfellene som utgjør alle mulighetene av rektangelets dimensjoner, og dermed har vi svaret.

2.3.10 Logisk resonnement

Logisk resonnement innebærer å undersøke og analysere problemet ved å bryte det ned i mindre deler og deretter bruke logisk resonnement for å finne en løsning (Posamentier & Krulik, 2008). Logisk resonnement er en strategi som blir brukt mye i dagliglivet, og er noe matematikklærere ofte oppfordrer elevene sine til å gjøre (Posamentier og Krulik, 2008). En vanlig tilnærming til *logisk resonnement* er å bruke argumentasjon og bevis for å bevise eller motbevise en hypotese eller løsning. Dette kan innebære å undersøke informasjon, sammenligne forskjellige alternativer og trekke konklusjoner basert på den informasjonen man har resonnert seg frem til (Posamentier & Krulik, 2008). Bronkhorst et al. (2020) underbygger denne definisjonen ved å trekke sammen teori om formell og uformell resonnering, og definerer *logisk resonnement* på følgende måte: " [...] selecting and interpreting information from a given context, making connections and verifying and drawing conclusions based on provided and interpreted information and the associated rules and processes" (Bronkhorst et al., 2020, s. 1676).

For å ytterligere beskrive *logisk resonnement* vil vi gi ett eksempel på hvordan det kan bli brukt i arbeid med ett matematisk problem under (hentet fra Posamentier & Krulik, 2008, s. 232):

> **Problem 10**
>
> Når et bestemt heltall deles med 15, blir resten 7. Finn summen av restene hvis vi deler det samme tallet med 3 og deretter med 5.

Vanligvis angriper studenter et problem av denne typen med en algebraisk tilnærming. Det vil si at hvis et tall er delelig med 15 med en rest på 7, må det være på formen 15 k + 7. På dette tidspunktet ser vanligvis studentene bort fra den algebraiske tilnærmingen og undersøker flere tall som gir en rest på 7 når de deles på 15. Disse kan inkludere 22, 37, 52 og så videre. Selvfølgelig kan dette føre til et svar, men det vil ikke avgjøre om svaret de får er sant for alle tall av denne formen. Vi kan løse problemet ved å bruke vår strategi med logisk resonnering. La oss begynne på det punktet der vi har uttrykt tallet på generell form, 15 k + 7. Når vi nå deler dette tallet med 5, deler vi 15 k med 5 og 7 med 5. Å dele 15 k med 5 gir ingen rest; å dele 7 med 5 gir en rest på 2. Nå deler vi 15 k + 7 med 3. Å dele 15 k med 3 gir ingen rest; å dele 7 med 3 gir en rest på 1. Dermed er summen av restene 2 + 1 eller 3, og problemet er løst.

3.0 Metode

I dette kapitlet vil vi gi en gjennomgang av forskningsmetoden vi har anvendt for å undersøke forskningsspørsmålene «*Hvilke beholdere lager elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?*» og «*Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?*». Vi vil først gjøre rede for vår forskningsstrategi og vårt forskningsdesign. Deretter vil vi presentere undervisningsopplegget vi har utformet, med tanke på oppgavene i seg selv, rammer, programmet elevene jobbet med og pilotgjennomføringen av opplegget. Videre vil vi beskrive vår metode for datainnsamling, rollen vi har hatt som observatører og utvalget som har vært informanter i studien. Deretter vil vi reflektere over etiske betraktninger knyttet til studien, der vi vurderer de etiske aspektene som er relevante for vår studie. I tillegg vil vi gjennomgå analyseprosessen, ved at vi forklarer hele prosessen som har ført til at vi har kommet frem til resultatene. Til slutt vil vi drøfte studiens kvalitet ved å diskutere kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet, som er kriterier for å vurdere forskningens troverdighet (Bryman, 2016).

3.1 Forskningsstrategi

Forskere som arbeider med kvalitative metoder, vil ofte posisjonere seg innenfor et konstruktivistisk paradigme (Bryman, 2016). I dette paradigmet betraktes virkeligheten som noe som blir konstruert gjennom samspillet mellom forskeren og deltakerne i studien (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 90). Dette samspillet blir synliggjort i vår studie ved at virkeligheten vil være vår tolkning av hva elevene gjør og sier. Dermed vil ikke en absolutt virkelighet bli beskrevet, ettersom det kun er vår tolkning som kommer frem i denne studien.

Epistemologi er forstått av Bryman (2016) som en gren innen filosofien som omhandler kunnskap og hvordan vi oppnår og forstår den. Innenfor konstruktivismen finnes det ulike epistemologiske tilnærminger, og som forklart i teorikapitlet forstår vi konstruksjonismen som en utvidelse av konstruktivismen. Konstruksjonismen legger vekt på at læring konstrueres bemerkelsesverdig godt når elever bygger, lager og deler objektene sine med omverden (Papert & Harel, 1991). Konstruksjonismen kan derfor ses på som vårt epistemologiske utgangspunkt, som vil ha betydning for hvordan vi oppnår og forstår kunnskap. Forskningsspørsmålene i denne oppgaven vektlegger hvilke beholdere som ble laget og hvilke strategier som ble benyttet i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing.

Gjennom disse forskningsspørsmålene legger prosjektet vekt på at elever skal modellere beholdere i samhandling med hverandre og deretter dele det med hverandre og oss som observatører.

3.2 Forskningsdesign

Dette forskningsprosjektet kan kategoriseres innen en form for enkeltcasestudie, da vår studie ønsker å se på en bestemt situasjon hvor en rik matematikkoppgave og 3D-printing har en betydning. Dette skaper en tydelig ramme som avgrenser vår studie til akkurat denne konteksten, noe som er typisk for en enkeltcasestudie (Yin, 2003). En enkeltcasestudie fokuserer på å undersøke en kontekst i dybden, istedenfor å gi en bred oversikt over flere tilfeller (Bryman, 2016). I vårt prosjekt vil vi se etter ulike problemløsningsstrategier blant få elever på 9. trinn. Dette kan føre til at vi får en grundig forståelse av hvordan elevene løser problemet og hvilke strategier de benytter seg av. Postholm og Jacobsen (2018) fremmer at hensikten med en enkeltcasestudie er å få innsikt og en teoretisk forståelse av en bestemt kontekst, istedenfor å komme med generaliserbare konklusjoner. Det vi ønsker med vårt prosjekt er å skape en forståelse av hvordan elever på 9. trinn jobber med problemløsningsstrategier og 3D-printing.

Et annet aspekt ved enkeltcasestudier er at de undersøker forskningsobjektene i deres naturlige kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). I dette prosjektet tok vi elever ut fra klasserommet og plasserte de på et grupperom som er tilhørende deres klasserom, hvor de ble filmet og tatt opp lyd av. Dette kan skape en unaturlig situasjon for elevene. I tillegg gikk også undervisningsopplegget over to ulike timer, der de fikk tilbake noe fysisk som de konstruerte digitalt. Deretter reflekterte de over hva de gjorde og hva som eventuelt ble feil, slik at de kunne endre på figuren sin. Yin (2003, s. 259) trekker frem at det ikke finnes noen omfattende oversikt over ulike forskningsdesign for casestudier, og at det derfor er stor variasjon i hvordan casestudier blir gjennomført. Derfor argumenterer vi for at vårt forskningsdesign er en form for enkeltcasestudie.

3.4 Undervisningsopplegget

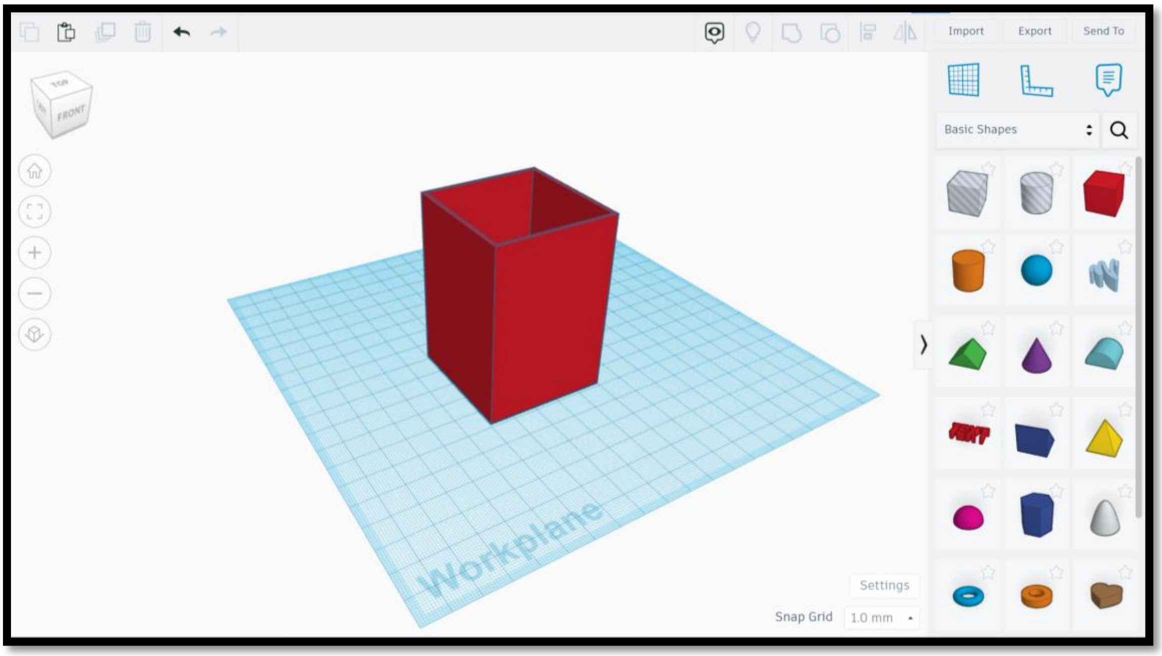
Undervisningsopplegget utformet vi selv, og fokuserte på tredimensjonale figurer i matematikk. Elevene brukte programvaren Tinkercad[2] til å lage egne tredimensjonale figurer som ble printet ut på en 3D-printer. Opplegget ble utformet med tanke på at elevene skulle jobbe med det matematiske emnet geometri, og nærmere bestemt volum og overflateareal av rette firkantete prismer. Ulike oppgaver ble gitt i forbindelse med de tredimensjonale figurene elevene lagde. Undervisningsopplegget besto av to deler. I den første delen skulle elevene gjennomføre oppgave 1, hvor de skulle modellere egne blyantholdere ved hjelp av Tinkercad og utførte ulike oppgaver relatert til blyantbeholderen. I den andre delen hadde beholderne blitt 3D-printet, og elevene hadde fått tilbake beholderne de lagde i del 1. I del 2 gjennomførte de flere av de samme utregningene som i første del, men hadde de fysisk 3D-printede beholderne tilgjengelig.

3.4.1 Tinkercad

Før vi går videre med å beskrive undervisningsopplegget, vil vi gi en kort introduksjon til Tinkercad, programmet elevene har benyttet i undervisningsopplegget til å modellere 3D-modeller. Tinkercad er et nettleserbasert CAD (Computer Aided Design) program som legger til rette for 3D-modellering av ulike design og prototyper. Programmet er brukervennlig og tilbyr en opplæringsmodul som hjelper brukere å bli kjent med de ulike funksjonene.

[2] Lenke til Tinkercad: https://www.tinkercad.com/3d-design

Når man skal konstruere modeller i Tinkercad, er det et utvalg av geometriske figurer tilgjengelig man kan bruke som utgangspunkt for å skape nye objekter. Programmet kan benyttes til å modellere alt fra enkle leker og spill til mer komplekse prototyper og design. Dette gjør Tinkercad godt egnet for bruk i skolen, ettersom det har en lav terskel for å komme i gang, samtidig som det gir gode muligheter for videre utforskning og utfordringer for elever i et klasserom (Eryilmaz & Deniz, 2021).



Figur 1: Skjermbilde av brukergrensesnittet i Tinkercad

3.4.2 Rike oppgaver

Vi har utviklet oppgavene som brukes i undervisningsopplegget selv. Vi prøvde først å finne eksisterende oppgaver som kunne bli brukt i opplegget vårt, men vi synes det var utfordrende å finne noe som passet. Vi ønsket en oppgave innenfor geometri som kunne kalles en rik oppgave og som kunne brukes sammen med 3D-printing. Rike oppgaver i matematikk er en form for problemløsningsoppgaver. Hedrén et al. (2005) har laget en liste med syv kriterier som er retningslinjer for hva en oppgave bør inneholde for at den skal kunne kalles rik. Vi brukte denne listen som utgangspunkt for å utforme vårt undervisningsopplegg:

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske ideer eller visse løsningsstrategier.
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha mulighet til å arbeide med det.
3. Problemet skal oppleves som en utfordring, kreve innsats og tillate å ta tid.

4. Problemet skal kunne løses på flere forskjellige måter, med ulike strategier og representasjoner.
5. Problemet skal kunne initiere en matematisk diskusjon basert på elevenes forskjellige løsninger, en diskusjon som viser ulike strategier, representasjoner og matematiske ideer.
6. Problemet skal kunne fungere som en bro mellom forskjellige matematiske områder.
7. Problemet skal kunne føre til at elever og lærere formulerer nye interessante problemer.

Først og fremst presenterer oppgaven vår det vi anser som en meningsfull og autentisk læringsopplevelse for elevene, der de måtte utforske og eksperimentere med viktige matematiske ideer og løsningsstrategier. Vi forsøkte å gjøre oppgavene enkle og klare i sin formulering, slik at elevene visste hva som var forventet av dem. I instruksjonene oppfordret vi elevene til å samarbeide, diskutere og dele ideer. Ved å integrere Tinkercad og 3D-printing, kunne oppgaven bli mer relevant og engasjerende for elevene. Det ga dem også en virkelighetsnær og praktisk kontekst, slik at elevene kunne anvende og utvide sine matematiske ferdigheter. Vi forsøkte å utforme oppgaven slik at den var lett å forstå og tilgjengelig for alle elever uavhengig av deres ferdighetsnivå. Dette gjorde vi ved at vi begrenset oppgaven ved å velge at beholderen skulle ha form som et rett firkantet prisme. Det ga klare nok instrukser for å starte med oppgaven, samtidig som at opplegget var åpent nok til at elevene kunne bruke ulike strategier i deres løsningsprosess. Tinkercad har forhåndsbestemte figurer som legger til rette for at alle kan lage noe, og en av disse forhåndsbestemte figurene er et rett firkantet prisme. En annen faktor som var med på å gjøre oppgaven tilgjengelig for alle, var at problemet er åpent med mange ulike måter å komme frem til svaret på. Det betyr at det var muligheter for alle elever å komme i gang med arbeidet og utforske oppgaven på sitt eget nivå. Samtidig som vi prøvde å gjøre oppgaven utfordrende og krevende nok til at elevene tenkte kritisk og kreativt for å finne løsninger.

Siden oppgaven ikke la opp til et direkte riktig eller feil svar, kan dette ha tilrettelagt for at det ble benyttet ulike løsningsstrategier og representasjoner. Dette kan ha bidratt til at elevene diskuterte og reflekterte over ulike tilnærminger på hvordan de kunne løse oppgaven. Dette aspektet kunne være med på å fremme matematiske samtaler og samarbeid mellom elever, og ga de muligheter til å lære av hverandre. Det var også forsøkt å legge opp til at oppgaven skulle være en brobygger mellom ulike matematiske områder, som geometri, de fire regneartene og enhetsberegning. Arbeid med oppgaven kunne også lede til formulering av nye og interessante problemer da elevene kunne stille oppfølgingsspørsmål og utforsket nye problemstillinger som oppstod i løpet av prosessen.

3.4.3 Tid/Rammer

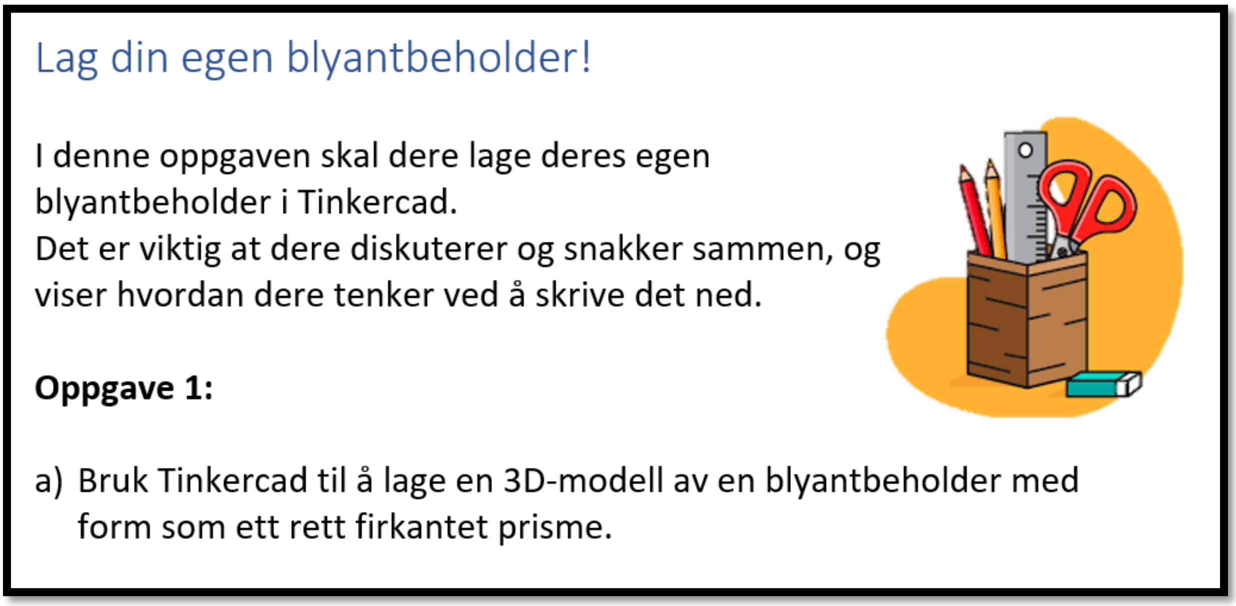
Undervisningsopplegget var delt opp i to deler som varte i 90 minutter hver, som totalt ble 180 minutter. Del 1 og del 2 av undervisningsopplegget ble for begge gruppene planlagt å gjennomføres med en ukes mellomrom. For gruppe 2 ble del 2 av undervisningsopplegget utsatt med ytterligere fire dager på grunn av sykdom hos en av elevene. I den første delen fikk elevene 30 minutter med opplæring i Tinkercad før de begynte på oppgavene. Denne delen var ikke med i datainnsamlingen. Resten av tiden ble brukt til å løse oppgavene, inkludert oppgave 1 hvor elevene skulle modellere sin egen blyantbeholder og utføre oppgaver knyttet til den. For å fortsette med del 2 trengte elevene den fysiske beholderen som skulle skrives ut på 3D-printeren. Elevene kunne derfor ikke fortsette til oppgave 2 i del 1 av undervisningsopplegget.

Etter del 1 av undervisningsopplegget var gjennomført sendte elevene oss prosjektet de hadde laget i Tinkercad på e-post. Vi tok videre ansvaret for at beholderen elevene hadde laget ble printet ut av en 3D-printer. Vi benyttet oss av 3D-printerne som er tilgjengelig via læringsvekstedet på Høgskolen i Østfold. Elevene hadde ingen innblikk eller deltakelse i printingen av beholderne.

Under gjennomføringen av undervisningsopplegget sørget vi for at rammefaktorene var så like som mulig for begge gruppene. Det ble brukt det samme grupperommet i gjennomføringen av begge delene av undervisningsopplegget, og dette grupperommet var tilknyttet elevenes klasserom. Videre passet vi også på at rammefaktorene i form av utstyr de hadde tilgjengelig var likt i begge delene, som antall blyanter, linjal, PC og ark. Antallet blyanter som ble utdelt var 10. Alle elevene benyttet sine egne datamaskiner, som var av samme type og modell.

3.4.4 Oppgaver del 1

Under kommer beskrivelser og forklaringer rundt de ulike oppgavene i del 1 og del 2 av undervisningsopplegget:



Lag din egen blyantbeholder!

I denne oppgaven skal dere lage deres egen blyantbeholder i Tinkercad.
Det er viktig at dere diskuterer og snakker sammen, og viser hvordan dere tenker ved å skrive det ned.

Oppgave 1:

a) Bruk Tinkercad til å lage en 3D-modell av en blyantbeholder med form som ett rett firkantet prisme.

Figur 2: Introduksjon og oppgave 1a, del 1

I oppgave 1a ba vi informantene lage en 3D-modell av en blyantbeholder ved å bruke programvaren Tinkercad. Vi ønsket at formen på blyantbeholderen skulle være et rett firkantet prisme, og formålet med oppgaven var å utfordre elevene til å modellere en beholder som de tror ville fungert bra i virkeligheten. Elevene kunne selv bestemme størrelsen på beholderen de modellerte. Vi valgte å begrense oppgavens omfang til et firkantet prisme på grunn av deres ferdigheter og erfaring med Tinkercad, samt for å være sikre på at vi kunne bruke beholderne de modellerte videre i de neste oppgavene.

Å designe en 3D-modell av en blyantbeholder ved hjelp av Tinkercad krever at elevene har en forståelse av geometriske former og deres egenskaper, inkludert rette firkantede prismer. Oppgaven ga elevene mulighet til å bruke sin forståelse av disse konseptene og anvende dem på en praktisk og relevant måte. Videre ga oppgaven også elevene mulighet til å utvikle ferdigheter i bruk av Tinkercad.

> b) Hvor mange blyanter får dere plass til i prismet? Finn ut, og vis hvordan dere tenker.

Figur 3: Oppgave 1b, del 1

I oppgave 1b skulle elevene ta utgangspunkt i prismet de lagde i oppgave 1a, og finne ut hvor mange blyanter de fikk plass til i prismet. Blyantene de brukte har de fått utdelt. Det var i denne oppgaven interessant for oss å se hvilke strategier de brukte for å finne ut hvor mange blyanter det var plass til. Vi valgte å inkludere denne oppgaven for at elevene skulle gjøre utregninger til ett problem som kunne knyttes til noe virkelig.

> c) Nå ønsker dere å male beholderen deres. Dere bruker 1mL maling per cm^2. Hvor mye maling trenger dere for å male beholderen? Finn ut, og vis hvordan dere tenker.

Figur 4: Oppgave 1c, del 1

I oppgave 1c skulle elevene finne ut hvor mye maling de trengte for å male beholderen de har modellert. Det er allerede oppgitt hvor mye maling som brukes pr cm^2 så utregningen vil være å finne overflatearealet til figuren de har modellert. I denne oppgaven får elevene jobbet med utregninger av overflateareal og beregninger av mengden maling som skal brukes. Tanken bak oppgaven var å trekke inn overflateareal i arbeidet med beholderen, og knytte dette opp mot noe som praktisk.

3.4.5 Tilleggsoppgave

Gruppe 2 fikk også en tilleggsoppgave, der vi spurte om de kunne lage en beholder som rommet akkurat 30 blyanter. Det var kun gruppe 2 som gjennomførte denne oppgaven, og hovedgrunnen til dette var de ble fort ferdig med de andre oppgavene. De hadde derfor tid til å gjennomføre en ekstra oppgave, gitt at det ikke gikk utover noe mer enn tiden vi hadde fått disponert til å gjennomføre opplegget. Dette var en oppgave vi som observatører kom på imens de jobbet med de andre oppgavene, der vi ønsket å se hvilken tilnærming elevene ville ha til å lage en beholder der det ønskede resultatet var gitt. Med resultat mener vi altså hvor mange blyanter denne nye beholderen skulle ha plass til.

3.4.6 3D-printing av modellene

Mellom gjennomføringen av del 1 og del 2 i undervisningsopplegget ble elevenes 3D-modeller som de hadde modellert i Tinkercad, printet ut ved hjelp av en 3D-printer. Elevene lastet ned sine modeller fra Tinkercad på deres datamaskin og sendte de til oss via e-post. Vi overførte deretter filene til en minnepinne som var kompatibel med 3D-printeren. Disse 3D-printerne er tilgjengelige for studenter gjennom læringssenteret ved Høgskolen i Østfold, og beholderne ble produsert der. To printere ble benyttet for å skrive ut beholderne. Den første printeren produserte beholderne som elevene hadde designet, og denne prosessen tok omtrent 15 timer. Den andre printeren skrev ut oppskalerte beholdere, som tok cirka 18 timer. De oppskalerte beholderne var opprinnelig utformet for å vise elevene blyantholdere som var litt større enn de de selv hadde laget, men de ble også benyttet til å lage oppgaver knyttet til størrelsesforhold og volum.

Selv om det fantes en 3D-printer på skolen hvor datainnsamlingen ble gjennomført, ble den ikke benyttet av ulike årsaker. Vi forhørte oss med flere lærere og ansatte på skolen, men vi fant ingen som hadde brukt den før eller visste om den fungerte. For det andre hadde ikke skolen noe tilgjengelig filament (plastmateriale brukt i utskriftsprosessen), og vi visste heller ikke hvilken type denne 3D-printeren brukte. Det var uheldig at elevene ikke kunne observere utskriftsprosessen, ettersom det kunne ha bidratt til at elevene kunne fått mer innsikt i hvordan teknologien fungerte.

3.4.6 Oppgaver del 2

Til oppgavene i del 2 gjorde vi noen endringer på strukturen på opplegget. Vi merket at når elevene arbeidet med oppgavene i del 1, reflekterte de ikke like mye rundt oppgavene som vi hadde ønsket. Vi la derfor til oppfølgingsspørsmål til de ulike oppgavene for at elevene skulle diskutere og reflektere mer rundt hva de gjorde. Oppgavene i del 2 bygger mye videre på det de lagde i del 1, og vi ønsket å få frem refleksjoner og tanker elevene gjorde rundt valgene de tok i del 1.

1. Se på beholderne dere lagde sist gang, og finn ut om utregningene dere gjorde om antall blyanter det var plass til, stemmer overens med det som faktisk er plass til.
    a) Hvorfor ble det riktig/feil?
    b) Fungerer det som en blyantholder?
    c) Hva ville dere gjort annerledes?

Figur 5: Oppgave 1abc, del 2

I Oppgave 1, del 2 mottok elevene beholderne de modellerte i del 1. Formålet med denne oppgaven var å få elevene til å reflektere om beregningene knyttet til beholderne de modellerte i del 1 stemte eller ikke. Vi ønsket også at elevene skulle vurdere beholderens praktiske funksjon, og hvorvidt den kunne fungere som en blyantholder. Til slutt i oppgave 1, ønsket vi å få innsikt i hvilke endringer elevene ville gjøre, eller hva de ville ha gjort annerledes dersom de skulle konstruere beholderen på nytt.

2. Se på beholderen som har blitt gjort større.
    a) Hvor mange flere blyanter er det plass til i disse, og hva er forholdet mellom størrelsen til beholderne?
    b) Er det noen sammenheng mellom antall blyanter og størrelsesforholdet? Diskuter sammen.

Figur 6: Oppgave 2, del 2

Videre i oppgave 2, del 2 fikk elevene utdelt en ny beholder i tillegg til den de lagde i oppgave 1. Den beholderen de nå fikk utdelt var formlik med den de hadde, men var oppskalert (se 4.1). I 2a skulle elevene finne ut hvor mange blyanter de fikk plass til i de oppskalerte i forhold til beholderne de modellerte. Deretter skulle de se om det var noen sammenheng mellom antall blyanter og størrelsesforholdet.

3. Doble alle lengdene i prismet dere lagde.
   a) Hva tror dere skjer med volumet? Diskuter sammen i gruppa. Finn ut hvor stort volumet blir, og hva som er forholdet mellom volumet på de to prismene.
   b) Hvor mange blyanter får dere plass til i dette nye prismet?
   c) Gjelder det for alle prismer hvor sidelengdene dobles? Finn ut og vis hvordan dere tenker.

Figur 7: Oppgave 3, del 2

I oppgave 3, del 2 skulle elevene doble alle lengdene i prismet de lagde i del 1 for å se hvordan volumet endret seg. Vi ønsket at elevene skulle komme frem til at om de doblet alle lengdene i et hvilket som helst prisme, så 8-dobler volumet i prismet seg. I oppgave 3a ønsket vi først at elevene skulle snakke sammen om hva de trodde kom til å skje med volumet om de doblet alle lengdene.

Til gruppe 2:
Se på beholderen dere laget til oppgaven der dere skulle lage en beholder som rommet 30 blyanter, ble det som dere trodde? Hvorfor/hvorfor ikke?

Figur 8: Oppfølgingsoppgave til tilleggsoppgaven gruppe 2 fikk i del 1.

I oppfølgingsoppgaven til tilleggsoppgaven gruppe 2 fikk i del 1 ønsket vi at elevene skulle reflektere og vurdere beholderen de hadde laget. Beholderen de hadde modellert i del 1 skulle ha plass til 30 blyanter. Når de fikk den fysiske beholderen tilbake, kunne de sjekke om det faktisk var plass til 30 blyanter. Det vi ønsket med denne oppgaven var å undersøke om elevene kan identifisere eventuelle feil som førte til at beholderen ikke fikk plass til 30 blyanter. Dersom beholderen var riktig i forhold til antall blyanter den hadde plass til, kunne dette også føre til at de forsto hvorfor beregningene deres var korrekte.

3.4.7 Pilotering

Siden vi hadde laget oppgaven og undervisningsopplegget selv, ønsket vi å gjennomføre en pilottest for å være sikre på at opplegget var gjennomførbart. Gjennomføringen fikk frem at det kunne være en fordel med noen endringer før vi skulle samle inn data. Vi fikk inntrykk av at elevene i pilottesten hastet med å bli ferdig med noen av oppgavene, uten å reflektere noe særlig rundt hva de hadde svart. Derfor valgte vi å dele opp oppgavenes a) b) og c) på ulike ark der tanken var at elevene ville ta seg bedre tid til hver oppgave. I tillegg til at det kunne tilrettelegge at elevene brukte tid på å diskutere seg frem til ett svar før de gikk videre på neste oppgave. Vi valgte også å endre på ordlyden på noen av oppgavene, ved å legge til at elevene skulle diskutere sammen og vise hvordan de tenker.

En del av undervisningsopplegget innebar at elevene skulle gjennomføre en opplæring i Tinkercad. Piloteringen viste oss hvor mye tid vi skulle sette av til det. Vi fikk også testet ut hvilken rolle vi som observatører skulle ha, hvilke spørsmål vi skulle stille og hvilke vi skulle svare på, og hvordan vi kunne svare uten at svarene var ledende. Elevene som deltok i piloteringen og elevene som deltok som informanter i datainnsamlingen gikk på samme trinn og på samme skole, og hadde samme matematikklærer. Elevene fra piloteringen og datainnsamling var dog fra ulike klasser, og dette var ett bevisst valg for å forsøke å sikre at elevene som deltok i datainnsamlingen hadde så lite forkunnskaper som mulig om hva de skulle gjøre i undervisningsopplegget. I tillegg ba vi eksplisitt elevene som deltok i piloteringen å ikke fortelle hva de hadde gjort i arbeidet med opplegget videre til de andre på skolen.

3.4.8 Refleksjoner knyttet til undervisningsopplegget

I utformingen av undervisningsopplegget ønsket vi at det skulle passe til det matematiske emnet geometri, da vi mente at det var det emnet som passet best til arbeid med 3D-printing.

Før vi utformet undervisningsopplegget visste vi at det skulle gjennomføres på 9. trinn, og vi ønsket å knytte oppgavene i undervisningsopplegget til kompetansemålene på 9. trinn. I læreplanen for matematikk er ett av disse å «utforske og argumentere for formler for areal og volum av tredimensjonale figurer» (Kunnskapsdepartementet, 2019*)*. Elevene jobber med kompetansemålet ved at de modellerer egne tredimensjonale figurer, som de utfører utregninger av areal og volum med. I etterkant ser vi at oppgavene bevegde seg litt utenfor kompetansemålet, og det kan argumenteres for at opplegget, med få justeringer, passer bedre til 6.trinn. Der er ett av kompetansemålene å «utforske mål for areal og volum i praktiske situasjoner og representere dem på ulike måter». Elevene utforsker mål for volum av deres beholdere i praktiske situasjoner, og beholderen blir både representert visuelt og fysisk. Videre er undervisningsopplegget også relevant for flere av kjerneelementet i matematikkfaget. *Utforsking og problemløsning* i matematikk blir synlig ved at elevene skal løse rike problemer der de bruker problemløsningsstrategier for å løse problemer de ikke er kjent med fra før (Kunnskapsdepartementet, 2019). *Representasjon og kommunikasjon* er også ett kjerneelement som kan knyttes til opplegget, med tanke på at elevene jobber med ulike representasjoner av deres modeller, og diskuterer og samarbeider for å løse problemer. Det kan også argumenteres for at kjerneelementet *modellering og anvendelser* kan knyttes til opplegget, med tanke på at elevene jobber med å modellere en tredimensjonal modell av noe virkelig, som vil være deres egen blyantbeholder.

3.5 Utvalg

Utvalget i denne studien er basert på at vi ønsker å undersøke hvilke problemløsningsstrategier elevene benytter seg av i arbeid med en rik oppgave som omhandler 3D-printing. Oppgaven elevene har gjennomført i denne studien har tatt utgangspunkt i tredimensjonale figurer og volum, og vi har derfor valgt ut elever fra skoletrinn som skal lære om dette matematiske emnet i løpet av skoleåret. Ifølge læreplan for matematikk er det 6.trinn og 9.trinn som har kompetansemål som omhandler tredimensjonale figurer og volum, og vi tok kontakt med en lærer på Østlandet som var lærer på 9.trinn. Skolen denne læreren tilhørte er en av praksisskolene som er tilknyttet Høgskolen i Østfold. Vi presentere vårt forskningsprosjekt i læreren sin klasse, der vi forklarte litt hva de skulle gjøre og hva 3D-printing gikk ut på. Etter vi hadde presentert prosjektet vårt delte vi ut ett samtykkeskjema til klassen, som læreren samlet inn neste uke. Samtykkeskjemaet besto av ett informasjonsskriv til både elever og foreldre som forklarte hva prosjektet handlet om, i tillegg til en samtykkeerklæring (Jf. 8.1). Læreren samlet deretter inn samtykkeskjemaene uka etter, og 12 elever fra klassen på totalt 21 elever hadde samtykket til både deltakelse og til å bli tatt lyd- og videoopptak av.

Læreren gjennomførte deretter ett utvalg fra de elevene som samtykket til både deltakelse og lyd- og videoopptak. Dette vil si at læreren valgte ut elever som han mente ville samarbeide på en god måte, og som også kunne gjennomføre opplegget vi hadde utformet. Ettersom vi kun skulle observere elever var vi avhengige av at elevene snakket og diskuterte sammen imens de gjennomførte opplegget. Ettersom vi ikke kjente klassen og elevene fra før, lot vi derfor læreren velge ut informanter. Det vil være disse elevene som forskningen bygger på, og disse elevene har fått pseudonymer for å gjøre behandlingen og analyseringen av empirien mer oversiktlig, og samtidig følge etiske retningslinjer med krav om anonymisering (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2021).

3.6 Datainnsamling

I dette forskningsprosjektet har vi valgt observasjon som metode for å samle inn data. Ifølge Thagaard (2018) innebærer observasjon å studere sosiale situasjoner og systematisk iaktta hvilke handlinger som blir gjennomført av deltakere i felten. Vi har observert to elevgrupper som har jobbet med undervisningsopplegget på ett grupperom tilknyttet deres klasserom. For å få med både elevenes skjerm, hva de sa, og hva de gjorde, brukte vi to kameraer og to mikrofoner til datainnsamlingen. Grunnen til at vi kun har valgt å observere elever i dette prosjektet henger sammen med vårt syn på læring, og med forskningsspørsmålene vi ønsker å svare på. Som forklart i teorikapitlet har vi ett konstruksjonistisk syn på læring, som handler om at læring konstrueres når elever bygger, lager og deler objektene sine med omverden (Papert & Harel, 1991). Vi har derfor valgt å observere elever som jobber med ett undervisningsopplegg der de skal modellere en 3D-modell, og gjøre beregninger med utgangspunkt i modellen de 3D-printet. Datamaterialet vil derfor bestå av elevenes observerte diskusjoner, arbeid med oppgaver og beholderne elevene lager. I forhold til forskningsspørsmålene så vi på observasjon som en hensiktsmessig metode ettersom vi ønsket å se hvilke problemløsningsstrategier elevene benyttet seg av.

Elevene jobbet i grupper på to og to, og dette var det noen ulike grunner til. For det første henger dette valget sammen med vårt syn på læring, da vi ønsket at elevene skulle diskutere, forklare og vise frem modellene de hadde lagd til hverandre. For det andre henger det sammen med observasjon som metode. Thagaard (2018) argumenterer for at observasjon som metode er særlig godt egnet til å studere samhandling, på grunn av at oppmerksomheten kan bli rettet mot hvordan personer forholder seg til hverandre i sosiale situasjoner. Samhandling vil i dette prosjektet handle om at elevene jobber sammen for å løse oppgavene, i tillegg til å dele og diskutere modellene de har lagd med hverandre.

Når vi observerte elevene valgte vi å ha en rolle som kan minne om det Postholm og Jacobsen (2018) beskriver som en deltaker-som-observatør rolle. Når elevene har jobbet med undervisningsopplegget har vi vært til stede i samme grupperom, og vært tilgjengelige dersom de har hatt noen tekniske problemer eller spørsmål til selve opplegget. Vi har altså kun svart på spørsmål de har hatt, men i noen tilfeller har vi også bedt om en oppklaring dersom vi var usikre på hva de mente. På den andre siden har elevene vært sittende med ryggen til oss under hele opplegget, slik at vi ble så lite synlige som mulig. Vi har også unngått å veilede elevene i problemløsningsprosessen, ettersom dette kunne hatt betydning for hvilke strategier elevene benyttet seg av. Hvor bevisste elevene har vært til vårt nærvær «fra sidelinjen», vil være knyttet til oppgavene de har holdt på med (Thagaard, 2018). Vi fikk inntrykk av at elevenes samhandling og diskusjoner ikke har blitt påvirket av vår tilstedeværelse i stor grad, og det er grunn til å tro at de samme strategiene ville blitt benyttet dersom vi ikke var til stede.

3.6.1 Video som innsamlingsverktøy

Før vi observerte valgte vi også å innhente samtykke til å ta videoopptak, og dette er det noen ulike grunner til. I motsetning til en forsker som kun baserer seg på notater tatt der og da i felten, kan en forsker med videoopptak systematisk se etter mønster og situasjoner som kan være utfordrende å oppdage direkte på stedet (Blikstad-Balas, 2017). Ettersom problemløsningsstrategier kan være nyansert og utfordrende å oppdage der og da, ønsket vi å ta opptak av elevenes arbeid. Dermed kunne vi gå tilbake å se om det var noe vi hadde gått glipp av under øktene, i tillegg til at vi både kunne se og høre hva elevene gjorde i de gitte situasjonene.

Blikstad-Balas (2017) argumenterer også for at når man bruker notater fra felten vil man kun ha en mulighet til å observere de gitte interaksjonene én gang, mens når man har videoopptak kan man gå tilbake å se så mange ganger man vil, selv med ulike analytiske briller. I dette prosjektet jobbet elevene med ett undervisningsopplegg som kun har vært gjennom en pilotgjennomgang, i tillegg til at det var elever fra en klasse vi ikke kjente fra før av. Derfor var det utfordrende å vite hva som kom til å bli sagt og gjort på forhånd. På bakgrunn av dette tenkte vi det var hensiktsmessig å ta videoopptak, slik at vi kunne gå tilbake til datamaterialet flere ganger og gjennomføre en tematisk analyse. På den andre siden kan dette også bli sett på som en begrensning med å bruke video som innsamlingsverktøy, med tanke på at det er tidskrevende (Blikstad-Balas, 2017). Det vil også være etiske problemstillinger knyttet til å ta videoopptak av elever, og vi vil reflektere rundt dette i neste kapittel (jf. 3.7).

3.7 Etiske betraktninger

Vår studie innebar å ta lyd- og videopptak av personer under 18 år, noe som medførte visse etiske problemstillinger vi var nødt til å ta hensyn til. Vi måtte innhente samtykke fra både elevene og deres foreldre, og vi var nødt til å vurdere hvordan lyd- og videomateriale skulle håndteres og lagres både underveis og etter prosjektets avslutning. Ifølge retningslinjene fra Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste (NSD), skal alle forsknings- og studentprosjekter som innebærer behandling av personopplysninger meldes til personvernombudet for forskning (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 252). Vi søkte derfor om godkjenning fra NSD for å gjennomføre prosjektet vårt. Prosjektet (referansenummer: 354421) ble godkjent 04.12.2022.

Postholm & Jacobsen (2018) beskriver informert samtykke som en av de tre grunnleggende etiske kravene innen norsk forskningsetikk når det gjelder forholdet mellom forskeren og de som blir forsket på. Informert samtykke handler om at deltakerne deltar frivillig og for å sikre dette utformet vi en samtykkeerklæring med informasjon om prosjektet som både elevene og foresatte kunne lese gjennom. Da vi skulle dele ut samtykkeskjema til elevene, besøkte vi skolen vi gjennomførte datainnsamlingen på og informerte elevene om prosjektet før de fikk utdelt samtykkeskjema. Samtykkeskjema ble delt ut til alle i klassen. Kun de som hadde fått samtykke fra sine foresatte og hadde samtykket selv, kunne bli inkludert som informanter i prosjektet.

Under hver av observasjonene som ble gjennomført, ble informantene først informert om formålet med datamaterialet og at taushetsplikt ville bli ivaretatt. Videre ble det presisert ovenfor elevene at datamaterialet kun skulle benyttes i sammenheng med vår masteroppgave, og at deres deltakelse i prosjektet ikke ville ha noen innvirkning på deres skolehverdag eller videre undervisning. Vi forklarte også elevene at all informasjon ville bli anonymisert, og at deres deltakelse var frivillig. Elevene ble informert om at alt som ble sagt og gjort ville bli tatt opp på lyd og film.

For å lagre lyd- og videomateriale benyttet vi oss av Microsoft Teams, som er en form for skylagring. Det ble opprett et «team» som kun forskerne ved dette prosjektet og veileder hadde tilgang til. For å komme inn kreves det en to faktor-autentisering, som da blir sikkerheten til dataen. Etter prosjektets slutt blir dataen slettet. Videre gjorde vi noen tiltak for å bevare anonymiteten til informantene. I analysen har vi brukt pseudonymer på informantene, og navnenøklene for å identifisere elevene har blitt lagret fysisk hos en av oss studenter.

3.8 Analyseprosessen

For å analysere datamaterialet vårt har vi hatt en induktiv deduktiv tilnærming (Bryman, 2016). Vi startet analyseprosessen med å ta utgangspunkt i det andre forskningsspørsmålet vårt, som omhandlet problemløsningsstrategier elever brukte i arbeid med oppgaven. Når vi observerte elevene fysisk opplevde vi at det var vanskelig å oppdage hvilke problemløsningsstrategier som ble benyttet av elevene. Vi valgte derfor å gå tilbake til datamaterialet, og ha en induktiv tilnærming til analysen. Ifølge Braun og Clarke (2012) har vi hatt en induktiv metode til koding og dataanalyse ved at vi har hatt en «bottom-up» tilnærming, som styres av det som er i dataen. Dette vil si at kodene og temaene som brukes i analysen kommer fra datamaterialet i seg selv, og det forskeren kartlegger og oppdager vil ha en nær sammenheng med innholdet i datamaterialet (Braun & Clarke, 2012). Vi valgte derfor å se gjennom datamaterialet en gang først hver for oss, og noterte ned tidspunkter og situasjoner fra videoopptakene vi opplevde som interessante. Dette gjorde vi for å forstå datamaterialet som data, da det ga oss ett kritisk og analytisk blikk på hva som ble sagt og gjort. Deretter møttes vi og sammenlignet notatene med hverandre, for å diskutere observasjonene og hva dataen kunne bety. Braun og Clarke (2012) foreslår en seksfaset tilnærming til tematisk analyse, og å bli kjent med datamaterialet vil være den første fasen i denne tilnærmingen.

Etter å ha diskutert observasjonsnotatene sammen og med veileder, begynte vi å lete etter noen overordnede temaer ut ifra det vi hadde observert som interessant. Vi kom frem til å se igjennom datamaterialet en gang til der resonnement og problemløsning var temaer som vi ville fokusere på. Disse temaene hadde sitt utspring fra sitatene og kommentarene vi hadde notert oss, og var ett utgangspunkt til hva vi kunne se nøyere etter i den neste gjennomgangen av datamaterialet. Braun og Clarke (2012) foreslår dette som den tredje fasen i deres tilnærming til tematisk analyse, der den andre fasen vil være å lage koder utfra datamaterialet. Vi valgte å snu på disse fasene i vår prosess, der vi fant de overordnede temaene før vi begynte med å kode observasjonene. Etter å ha lest teori om både problemløsning og resonnering lagde vi koder som vi brukte for å identifisere temaene i datamaterialet vi hadde. Eksempelvis ville problemløsning bli identifisert ved at elevene tok i bruk en strategi for å løse ett problem. Resonnering ville bli identifisert der elevene måtte argumentere eller begrunne for en løsning eller strategi.

På samme måte som når vi ble kjent med datamaterialet så vi på datamaterialet hver for oss en gang til, der vi observerte problemløsning og resonnement. Vi møttes så og diskuterte hva vi hadde funnet som var tilknyttet de to overordnede temaene vi hadde. Braun og Clarke (2012) foreslår dette som den fjerde fasen, og denne fasen handler om å gjennomgå og kvalitetssjekke potensielle temaer. Vi gjennomgikk de ulike observasjonene og var ute etter å se om vi hadde nok meningsfull data for å støtte å gå videre med de to temaene i analysen. Vi oppdaget at vi hadde mer data knyttet til temaet problemløsning, og diskuterte hvordan vi kunne bruke dette for å komme videre i analyseprosessen. Vi valgte å gå tilbake til start og se nærmere på problemløsning, og det neste steget i prosessen var å finne ut hva som var interessant å analysere innenfor dette temaet. Schoenfeld (1985) beskriver problemløsning som ett begrep som har hatt flere og ofte motstridende definisjoner i litteraturen, og vi ønsket derfor å finne ett område innenfor problemløsning som vi kunne fokusere på. Ettersom vi hadde mye observasjoner på hvilke strategier elevene benyttet seg av, og hvordan de brukte strategiene for å løse problemer valgte vi å ha ett fokus på problemløsningsstrategier ved neste gjennomgang av datamaterialet.

Etter å ha lest teori om problemløsningsstrategier og gjennomgått tidligere forskning, fant vi flere eksempler på problemløsningsstrategiene som Posamentier og Krulik (2008) nevner i sin bok: *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions*. Vi valgte derfor å gå videre med disse strategiene som ett konseptuelt rammeverk i analysen, og kunne nå kategorisere observasjonene etter de ulike strategiene som blir beskrevet. Dermed gikk vi fra en induktiv til en deduktiv tilnærming i analyseprosessen. Ifølge Braun og Clarke (2012) gikk vi over til en deduktiv tilnærming ved at vi tok med oss konsepter og ideer som ble brukt for å kode og forstå dataen. Deretter så vi gjennom datamaterialet en gang til hver for oss, og kategoriserte de ulike strategiene elevene benyttet seg av etter vår forståelse av de ti strategiene innenfor rammeverket. Deretter gikk vi systematisk gjennom analysene våre, for å lage ett samlet dokument med alle strategiene vi hadde observert. Dersom det var noen strategier der vi var uenige på kategoriseringen, diskuterte vi oss frem til en felles forståelse. Dette foregikk ved at vi sammenlignet våre tolkninger, og så de gjeldende situasjonene sammen på nytt. Ett eksempel på dette hadde vi med utdraget under:

> Peder: 122, hvis vi tar noe med 2 ganger 4. 140, 3. 210, så hvis vi tar 2,5 ganger 4, ganger. 175. 2,7 nå, for å få sånn akkurat ganger 4 ganger 17,5. 189 akkurat. Vetle: Ja ok, så du fant det. Peder: så 2,7x4x17,5 blir da 189.

Her var vi uenige i om dette kun tilhørte kategorien *gjett og sjekk*, eller både *gjett og sjekk* òg *jobbe bakover*. Vi gikk derfor tilbake i datamaterialet, og så på situasjonen sammen. Etter å ha diskutert og sett gjennom, konkluderte vi med at dette tilhørte begge kategoriene. Grunnen til dette var at de jobber ut ifra ett ønsket volum, men gjetter seg frem til hvor lange sidekantene må være da de allerede vet hva høyden til beholderen skal være. Dette gjorde vi med flere av situasjonene og utdragene, som førte til at flere utdrag hører til samme kategori, eller endret kategori etter diskusjonen.

For å kategorisere de ulike observasjonene, benyttet vi oss av følgende kodeskjema:

Kategori	Kriterier for kategori
Jobbe bakover	• Reversere operasjoner for å komme tilbake til utgangspunktet • Jobbe utifra en ønsket konklusjon
Se fra en annen synsvinkel	• Finne nye måter å se problemet på • Dele opp og rekombinere elementene på en mer tilgjengelig måte
Se etter mønster	• Finne eller gjenkjenne mønstere og bruke det aktivt i problemløsningen
Forenkle problemet	• Dele opp problemet • Løse enklere deler av problemet før man gradvis løser vanskeligere deler av problemet
Vurdere ekstreme tilfeller	• Vurdere og bruke tilfeller som er ekstreme for situasjonen i problemet
Visuell representasjon	• Representere informasjon på en visuell måte • Bruke tegninger/modeller til å assimilere relevant informasjon
Gjett og sjekk	• Vurdere og avgrense for potensielle løsninger • Gjette og teste basert på intellignete vurderinger
Organisere datamaterialet	• Hente ut, systematisere og kategorisere informasjon
Gjøre rede for alle muligheter	• Lage oversiktlige lister eller tabeller for alle muligheter
Logisk resonnement	• Generere logiske utfall • Trekke ut informasjon, tolke den og konkludere på bakgrunn av den

Tabell 1 Kodeskjema for analyse

Når vi presenterer resultatene har vi valgt å ta utgangspunkt i noen utsagn fra de ulike strategiene som vi ønsker å diskutere. Dette vil si at ikke alle problemløsningsstrategiene som ble observert vil bli presentert i resultatkapitlet.

3.9 Kvalitet i studien

All forskning som gjennomføres må kvalitetssikres, og kriterier som ofte trekkes frem for å sikre troverdighet og holdbarhet i forskning er reliabilitet og validitet. Reliabilitet og validitet er ifølge Bryman (2016) viktige kriterier for å etablere og vurdere kvaliteten innen kvantitativ forskning, men stiller spørsmål ved relevansen av disse kriteriene i kvalitativ forskning. For å tilpasse validitet og reliabilitet til kvalitativ forskning blir *troverdighet*[3] trukket frem som ett alternativt kriterium.

For å vurdere troverdigheten til en kvalitativ studie blir det trukket frem fire kriterier. Disse kriteriene er: *Kredibilitet, overførbarhet, pålitelighet og bekreftbarhet.*[4]

Kredibilitet handler om at forskningen representerer virkeligheten til de som har blitt studert, og at funnene samsvarer med det som har blitt observert (Bryman, 2016). For å sikre kredibiliteten i denne studien har vi vært to personer som har observert og analysert datamaterialet. Ettersom vi har kodet og analysert dataen hver for oss, har det gitt oss mulighet til å diskutere og se på hverandres observasjoner og funn. For det andre har vi sett gjennom datamaterialet flere ganger, med ulike «briller». Dette har gitt oss flere vinkler til å forstå og tolke datamaterialet, for å forsøke å sikre at vi har gått glipp av så lite observasjoner som mulig. Som forklart tidligere i metodekapitlet har vi kun valgt å observere elever i denne studien, og dette kan være en svakhet med tanke på å representere elevenes virkelighet. På den andre siden har vi utformet undervisningsopplegget med ett hovedfokus på at elevene skal diskutere med hverandre, og vise hvordan de tenker. Ved å ha ett fokus på dette gjennom hele undervisningsopplegget har vi økt sannsynligheten for at elevene prøver å forklare

[3] Oversettelse av begrepet *trustworthiness* fra Bryman (2016).

[4] Oversettelse av begrepene: *Credibility, transferability, dependability, og confirmability* fra Bryman (2016).

hvordan de tenker, og begrunner valgene de tar i arbeidet. Vår rolle som forskere er også relevant med tanke på hvordan elevenes virkelighet blir representert. Dersom det var situasjoner som vi merket at noe kunne være uklart spurte vi elevene om de kunne forklare hva de tenkte, og inviterte til at de kunne forklare hvordan de kom frem til svaret.

Overførbarhet er en parallell til ekstern validitet i kvantitativ forskning, og handler om hvordan funnene fra forskningen kan bli generalisert og overført til andre kontekster og miljøer (Bryman, 2016). Vi kan derfor stille spørsmål om hvem disse funnene vil gjelde for? Og ville alle elever benyttet seg av de samme strategiene om de hadde blitt presentert for undervisningsopplegget? Ettersom vi har gjennomført en kvalitativ studie med få informanter, er det vanskelig å sikre at funnene kan bli generalisert. Den unike konteksten og den sosiale realiteten rundt funnene er ett viktig aspekt. Bryman (2016) foreslår derfor å tenke på overførbarhet som hvordan forskningen gir leseren muligheter til å overføre funnene til deres egne kontekster og miljøer. For å gi lesere denne muligheten har vi forklart hvordan vi har gjennomført undervisningsopplegget i detalj, rammene elevene har hatt, og vært transparente på hvilken rolle vi har hatt som observatører. Vi har beskrevet utvalget av informanter som har deltatt i forskningsprosjektet, og hvordan vi har valgt ut informantene som har deltatt i prosjektet. Selv om funnene fra vår forskning ikke vil gjelde for alle 9.klasseelever, kan det gi ett innblikk i hvordan elever jobber med 3D-printing og hvilke problemløsningsstrategier denne arbeidsformen legger opp til.

Pålitelighet handler om at studien inneholder en «audit trail» som forklarer forskningsprosessen (Bryman, 2016; Koch, 1994). Dette innebærer at leseren skal ha en mulighet til å få en forståelse av valg og endringer som er gjort, og at de ulike fasene i forskningsprosessen blir dokumentert og redegjort for. For å sikre påliteligheten i dette prosjektet har vi forklart hvorfor vi har tatt ulike valg med tanke på metode, utvalg av informanter og vår rolle som observatører. Endringer vi har gjort underveis har også blitt dokumentert og begrunnet, for eksempel med tanke på hvordan vi endret på undervisningsopplegget fra pilotundersøkelse til gjennomføring. Vi har også forklart analyseprosessen vår i detalj, som skal gi en forklaring på hvordan vi endte opp med de kodene, temaene og resultatene som vi har gjort i dette prosjektet. Vi har i dette prosjektet valgt å ikke transkribere all lyd til tekst. Vi valgte heller å se på datamaterialet flere ganger når vi analyserte. Blikstad-Balas (2017) argumenterer for at videoopptak gir forskere mulighet til å observere mer enn det som kun blir sagt, og denne argumentasjonen ligger til grunn for hvorfor vi ikke har tatt utgangspunkt i transkribert tekst i analysearbeidet. Ettersom undervisningsopplegget går ut på at elevene jobber med visuelle og fysiske representasjoner av deres matematiske ideer, ønsket vi å beholde konteksten når vi analyserte de ulike strategiene som blir brukt. På den andre siden transkriberte vi de utdragene som vi tolket som problemløsningsstrategier, og resultatene som presenteres blir derfor støttet av utdrag i form av tekst fra videomaterialet. Dette er for å gi leseren ett innblikk i datamaterialet og gi en forståelse av hvorfor vi tolker dataen som vi gjør.

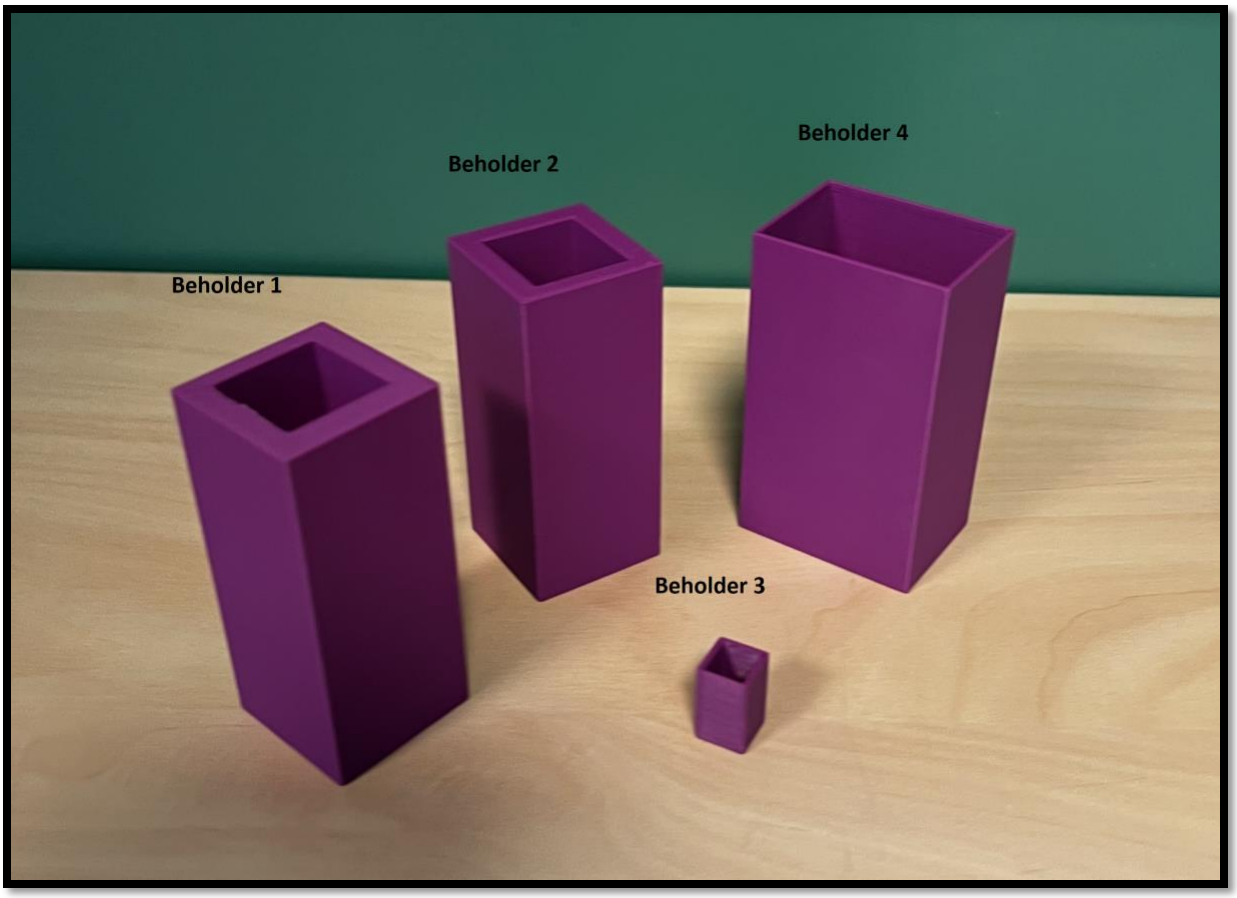
Bekreftbarhet innebærer at forskningen er blitt gjennomført i god tro; altså at forskeren har en objektiv rolle til prosjektet, og ikke lar personlige meninger og antakelser styre hvordan en kommer frem til resultater og konklusjoner (Bryman, 2016). For å styrke bekreftbarheten i dette prosjektet har vi vært transparente med valg, endringer og hva som har blitt gjort i de ulike fasene av forskningsprosessen. For eksempel har vi forklart hva vi endret med undervisningsopplegget etter pilotundersøkelsen, observatørrollen vi har valgt og hvilke valg vi har tatt i analyseprosessen. Elevene som deltok i undersøkelsen fikk heller ikke vite oppgavene på forhånd, eller hva vi så etter i arbeidet deres. Vi gjennomførte pilotundersøkelsen med elever fra en annen klasse, og ba de eksplisitt om å ikke fortelle sine medelever om hva de hadde gjort. Vi har heller ikke gitt veiledning i hvordan de skal løse oppgavene, men har spurt om hvordan de har kommet frem til svar dersom noe har vært uklart. I resultatkapitlet vil det være beskrivelser på alle utdragene for å skape en kontekst, i tillegg til en forklaring på hvorfor vi har vi har valgt å tolke utdragene som den gitte strategien eller strategiene.

4.0 Resultater

Resultatkapitlet i denne studien vil være todelt. Den første delen av kapittelet (jf. 4.1) vil presentere resultater som omhandler det første forskningsspørsmålet: «*Hvilke beholdere lager elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?*». Denne delen vil inneholde beskrivelser av de ulike blyantbeholderne som ble modellert av elevene. I den andre delen (jf. 4.2 og 4.3) vil det bli presentert resultater fra den gjennomførte analysen som omhandler forskningsspørsmål to: «*Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?*». Vi valgte altså å dele analysen i to deler. Den første delen (jf. 4.2) vil inneholde funn fra del 1 av undervisningsopplegget. Her skulle elevene modellere blyantbeholdere på PC-en og hadde derfor ikke tilgang på de fysiske beholderne enda. Den andre delen (jf. 4.3) vil inneholde funn fra den andre økten i undervisningsopplegget, der elevene hadde tilgang til de fysiske 3D-printede blyantbeholderne de modellerte i del 1. Det kommer til å være ett gjennomgående fokus på hvilke problemløsningsstrategier elevene har benyttet, og ikke nødvendigvis om strategiene fører til en løsning på problemet. Vi vil ta i bruk transkripsjoner fra observasjonen for å begrunne de funnene vi gjør. Grunnen til dette er at vi ønsker å gi leseren en dypere innsikt i datamaterialet, for å skape en forståelse av hvorfor vi tolker dataene som vi gjør.

I løpet av analyseprosessen ble det avdekket at flere av observasjonene kunne tolkes innenfor ulike kategorier, eller i kombinasjon med hverandre. Ettersom kapittelet er strukturert etter de ulike problemløsningsstrategiene, ga det oss noen utfordringer med tanke på hvor vi skulle plassere observasjonene som ble kategorisert innenfor flere strategier. Observasjonene vil derfor være plassert under den problemløsningsstrategien vi har tolket som hovedstrategi. Av den grunn vil forklaringen til noen av observasjonene inneholde flere problemløsningsstrategier, enten ved at de kan tolkes på ulike måter, eller ved at de har brukt strategier i kombinasjon med hverandre.

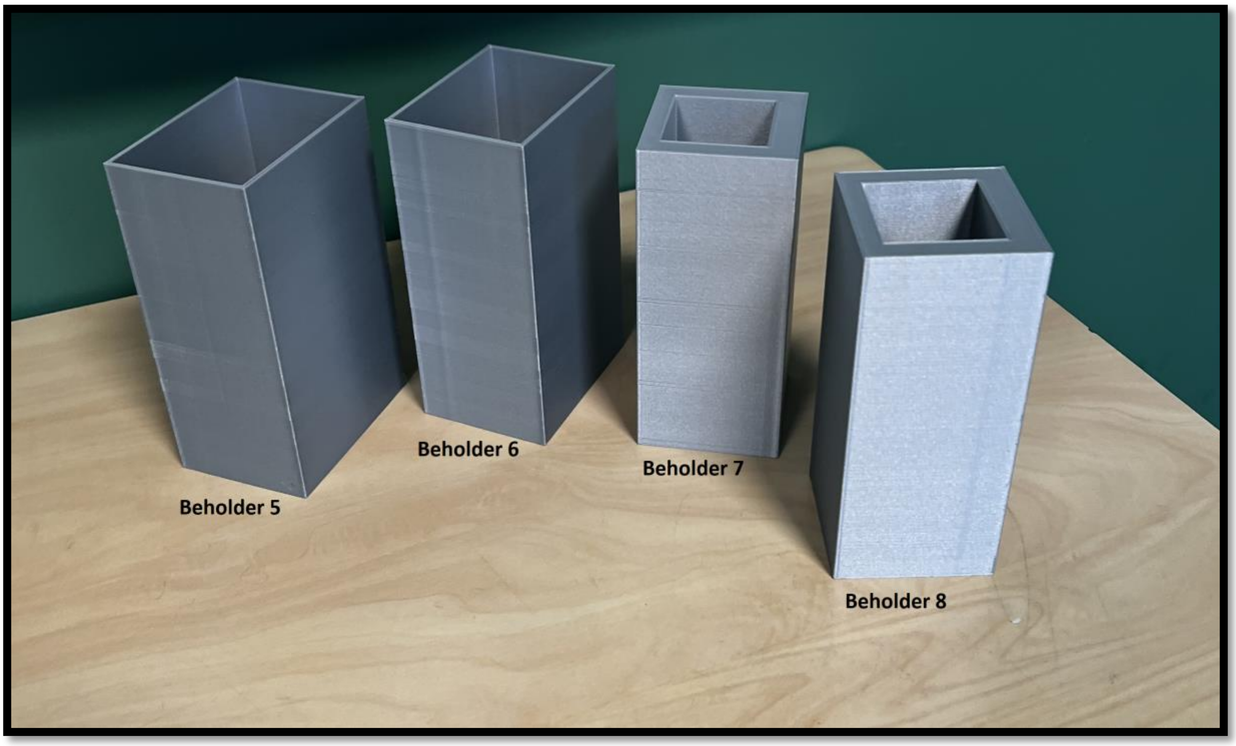
4.1 Blyantbeholdere



Figur 9: Blyantbeholdere som elevene har laget

I bildet over ser vi fire beholdere som elevene modellerte i første del av undervisningsopplegget. Beholder 1, 2 og 3 ble modellert av gruppene for å svare på oppgave 1a). Beholder 4 ble modellert av gruppe 2 som svar på ekstraoppgaven i del 1, der målet var å modellere en beholder som kunne romme 30 blyanter. Beholder 1 og 2 er nesten helt like i størrelse og form. Forskjellen er at det indre prismet der de skal ha plass til blyanter ikke er helt i senter av beholder 1. Disse beholderne har en kvadratisk grunnflate og de utvendige målene er 30mm x 30mm x 70mm. Elevene trodde at det ville være plass til 11 blyanter i hver av dem, men i andre del av undervisningsopplegget oppdaget de at det var plass til 6 blyanter.

Beholder 3 ser litt annerledes ut enn beholder 1 og 2. Gruppen som modellerte denne beholderen ønsket å modellere en beholder som kunne romme én blyant. De regnet ut riktig, og i andre del av undervisningsopplegget ble det bekreftet at beholderen kunne inneholde én blyant. Det ble observert og poengtert av elevene at beholder 3 var ganske ustabil og veltet fort om blyanten lente seg for mye. Målene på beholder 3 er 10mm x 10mm x 17mm, som gjør den ganske liten sammenlignet med de andre beholderne. Beholder 4 ble modellert som svar på tillegssoppgaven. I følge utregningene og forklaringene til elevene i del 1 kom den til å ha plass til 30 blyanter, men i andre del av undervisningsopplegget fant elevene ut at den hadde plass til 20 blyanter. De ytre målene på beholder 4 er 41mm x 30mm x 70mm.



Figur 10: Oppskalerte versjoner av beholder 1 og 4

I bildet over vises oppskalerte versjoner av beholder 1 og 4. Disse beholderne ble i utgangspunktet printet ut for at elevene skulle se noen beholdere som var litt større enn beholderne de selv hadde modellert. De ble også brukt til å lage oppgaver, der de kunne sammenligne sine egne beholdere med de oppskalerte. Beholderne var oppskalert til å være fem ganger større i volum enn de originale beholderne. Beholder 5 og 6 er oppskalerte versjoner av beholder 4, mens beholder 7 og 8 er oppskalerte versjoner av beholder 1. Beholderne ble brukt i sammenheng med oppgave 2 i del 2 av undervisningsopplegget.

4.2 Funn del 1

I dette kapittelet vil det bli presentert funn fra den første undervisningsøkten som omhandler det andre forskningsspørsmålet. Kapittelet er strukturert etter de ulike problemløsningsstrategiene, og etter hvor mange forekomster strategiene hadde i analysen. Dette vil si at strategiene som er blitt mest brukt, vil bli presentert først.

4.2.1 Logisk resonnement

Strategien *logisk resonnement* var den strategien med flest forekomster i den første undervisningsøkten. I eksempelet under jobber gruppe 1 med oppgave 1c). Etter å ha stått fast på hvordan de skal finne overflatearealet av beholderen de har lagd, kommer Johan med ett forslag om at de kun trenger å finne arealet av én vegg for å finne arealet av alle veggene. Dette vil si at Johan benytter seg av strategien *logisk resonnement* ved at han bryter problemet ned i mindre deler, og resonnerer seg frem til at de kan finne arealet av én vegg for å finne overflatearealet til utsiden av hele beholderen. Johan bruker også 3D-modellen de har lagd for å vise Ole hvordan han tenker, ved å peke på sideflatene på modellen. Vi vil også kategorisere denne situasjonen som problemløsningsstrategien *se etter mønster,* da elevene ser en sammenheng ved at alle sideveggene vil være like store. Derfor kan de finne arealet på én vegg, for å finne overflatearealet til utsiden av hele beholderen. Under er ett utdrag fra gruppe 1 mens de jobber med oppgave 1c).

> Johan: For cm^2 er ikke det areal?
>
> Ole: Jo, det er areal.
>
> Johan: Så hvis vi bare finner arealet av en vegg, som er den veggen her. Hva er arealet av den her? For hvis vi finner den, så finner vi den og den og den.
>
> *Viser sidemann ved å peke på alle sidekantene i prismet*

I neste eksempel jobber gruppe 2 med oppgave 1b). I oppgaven prøver de å finne ut hvor mange blyanter de får plass til i beholderen de har modellert i Tinkercad. De har regnet ut at grunnflaten til én blyant er 36mm^2, og at grunnflaten til beholderen er 400mm^2. De har benyttet seg av strategien *logisk resonnement* der de tenker logisk ved at blyantene skal stå oppreist i figuren, og bruker informasjonen til å finne ut hvor mange blyanter bunnen av beholderen vil få plass til. Det vil si at de kun tar utgangspunkt i grunnflaten av både blyanten, og beholderen. Peder bruker beholderen som en *visuell representasjon* ved å peke på bunnen for å formidle sin tankeprosess til Vetle.

> Vetle: Hva er regnestykket?
> Peder: Vi må bare ... eller 36 .... millimeter, vent ... Ja jeg har sånn ca. arealet her tror jeg, også 400 millimeter er rundt hele her, flaten som vi har her.
> *Peker på bunnen av modellen*
> Peder: Så jeg bare prøver å finne ut hvor mange vi kan sette på, ved siden av hverandre i hele.

Etter gruppe 2 hadde gjort ferdig undervisningsopplegget fikk de en ekstra oppgave der de skulle modellere en ny beholder. Denne skulle også være en rett firkantet prisme, og ha plass til 30 blyanter. Her tenker de først på hvor stor den første beholderen de modellerte var, og hvor mange blyanter de fikk plass til i den. Deretter tenker de at høyden nødvendigvis ikke vil ha noen betydning for hvor mange blyanter de vil få plass til, det er lengden og bredden som vil være viktig. Strategien *logisk resonnement* kommer derfor frem ved at de har resonnert seg frem til at de kan bruke den forrige beholderen som ett utgangspunkt, og at det kun er bredden og lengden på prismet som må endres. Peder bruker hendene for å få frem dette poenget til Vetle, ved å visualisere hva lengden og bredden på beholderen vil være.

> *Akkurat fått en oppgave om å modellere en ny beholder der det er plass til 30 blyanter* Peder: Vi fikk 11.
> Vetle: Og vi tok 30,30, og 70 høyde.
> Peder: Ja, men høyden har ikke så mye å si, det er det her som er viktig. *Gestikulerer med hendene at han mener bredden og lengden på grunnflaten*

4.2.2 Forenkle problemet

Strategien *forenkle problemet* var den strategien med nest flest forekomster i den første undervisningsøkten. I utdraget under jobber gruppe 1 med oppgave 1b) hvor de skal finne ut av hvor mange blyanter det er plass til i beholderen. De står fast på hvordan de regner volum av blyanten, og velger her å benytte seg av strategien *forenkle problemet* for å løse problemet. De *forenkler problemet* ved å endre beholderen slik at den kun rommer én blyant. På den måten unngår de å regne ut volumet av blyanten, på grunn av at beholderen blir tilpasset målene til én blyant. Dette er også ett eksempel på at elevene *jobber bakover*, ettersom de har en ønsket konklusjon og endrer på modellen for å passe konklusjonen deres. Dette mener vi ved at elevene tar utgangspunkt i hvor mange blyanter de skal ha plass til i modellen, istedenfor å ta utgangspunkt i hvor mange blyanter beholderen deres rommer. Problemløsningsstrategien *vurdere ekstreme tilfeller* blir også synlig når elevene endrer beholderen til å romme én blyant. Ettersom de gjør beholderen så liten som mulig, for å få plass til så få blyanter som mulig. Det kan derfor ses på som at de vurderer og bruker ett tilfelle som er ekstrem for situasjonen i problemet deres.

> Ole: Jeg tror hvis vi deler den opp for hver kant så blir det veldig avansert.
> Johan: Ja, men hvordan ellers skal vi gjøre det?
> Ole: Nei det vet jeg ikke.
> Johan: Ikke jeg heller. Kunne vi ikke bare lage en cm, eller endre på boksen? Eller, jeg vet ikke. Endrer litte grann på boksen så den blir litt mindre. 1cm. Sånn sånn sånn.
> Ole: Så du mener at vi skal ha én blyant oppi?

Gruppe 1 fortsetter å ta utgangspunkt i denne beholderen som har plass til én blyant videre i oppgavene, og når de kommer til oppgave 1c) bruker de igjen strategien *forenkle problemet*. Etter å ha stått fast på oppgave 1c) uten å finne ut hvordan de skal finne overflateareal av beholderen deres, velger elevene å gjøre om lengden og bredden til et helt tall. De passer også på at beholderen fortsatt bare vil ha plass til én blyant, slik at svaret på den forrige oppgaven forblir det samme. Elevene endrer altså på den visuelle modellen de har modellert, slik at de får ett enklere utgangspunkt når de skal regne ut overflatearealet.

> Ole: Kanskje vi burde bare heller gjort om den figuren til å være 1cm bred og lengde?
> Johan: Ja, men da får vi jo ... Åja, men vi får fortsatt bare plass til 1 blyant. Åja!

Gruppe 2 har også en tilsvarende strategi til ett liknende problem. De bruker også strategien *forenkle problemet* ved at de først endrer på målene til modellen slik at det blir hele tall og enklere å regne. Ettersom målene også er i mm på Tinkercad, nevner Peder at de kan gjøre om målene til cm. De finner derfor ut at arealet til en av sideflatene er $21cm^2$, og Peder forklarer at de kan multiplisere dette med fire for å finne arealet av alle sideflatene på utsiden av beholderen.

> Peder: *Endrer på modellen for å få hele tall* 30, 70. Bare for å finne flaten av den første. Men vi kan si bare 3cm siden vi går i cm da. Ehh, er 21. Er en flate sånn så vi må gange det med fire da.

4.2.3 Se fra en annen synsvinkel

Problemløsningsstrategien *se fra en annen synsvinkel* dukket opp mens elevene jobbet med oppgave 1b) i første del av undervisningsopplegget. I utdraget under står elevene fast på hvordan de skal regne ut volum av en blyant. De velger å se den fra underflaten, og Johan foreslår at de kan dele opp blyanten i enklere former. Dette er en strategi de bruker med tanke på at de ikke vet hvordan de skal finne volum av en blyant som består av flere former. Strategien *se fra en annen synsvinkel* kommer frem ved at elevene prøver å endre perspektiv, og se på blyanten på en annen måte.

> Johan: Hvordan skal vi regne ut volum av en blyant?
> Ole: Det vet jeg virkelig ikke.
> Johan: Hvis vi tar bredden som er underflaten, vi bare kutter den i to ikke sant som Petter (Matematikklæreren deres) sa. En form er den, og en form er den. Så da er lengden, da må vi finne lengden på den. For vi vet allerede at bredden er 0,7.

Gruppe 2 har en litt annen strategi enn gruppe 1 på oppgave 1b), der Peder forklarer at de kun trenger å finne arealet av bunnen på blyanten og beholderen for å finne ut hvor mange det er plass til. Strategien *se fra en annen synsvinkel* blir synlig ved at de endrer perspektiv på problemet. Peder forklarer at ettersom blyantene skal stå oppreist, så vil arealet av bunnen til prismet og blyantene være det som har noe å si for hva de trenger å regne ut, og ikke nødvendigvis volumet. For å forklare dette til Vetle viser Peder hvordan han tenker ved å vise hva han mener på modellen de har modellert.

> Peder: Vi trenger bare å regne ut hvor mye ... De skal sitte sånn ikke sant. *Viser at blyantene skal stå oppreist i figuren* Så vi må bare regne ut arealet på bunnen for å legge etter det.
> Vetle: Mmm, ja.
> Peder: Vi trenger ikke mer enn det.

4.2.4 Se etter mønster

Strategien *se etter mønster* ble også benyttet i den første delen av opplegget. Når Gruppe 2 jobbet med ekstraoppgaven så de en sammenheng med volumet av prismet og antall blyanter de får plass til. Peder forklarer at ettersom volumet dobler seg, så vil antallet blyanter de får plass til også doble seg. Dermed forklarer de at når volumet øker med $400mm^3$ så vil antall blyanter de får plass til øke med 11. Strategien *se etter mønster* blir derfor synlig ved at de bruker denne sammenhengen for å komme frem til ett svar som er i nærheten av det de er ute etter. De forklarer også at de må fjerne $100 \ mm^3$ fra det endelige volumet, for at de skal ha plass til akkurat 30 blyanter i det endelige prismet. Vi kategoriserer også dette utdraget innenfor strategien *logisk resonnement,* ettersom elevene resonnerer seg frem til mønsteret ved å ta utgangspunkt i en hypotese. Hypotesen er i dette tilfellet at de får plass til cirka 11 blyanter i $400mm^3$, og elevene bruker dette som argumentasjon når de diskuterer seg frem til hvor mye volum de trenger for å få plass til 30 blyanter.

> Peder: Okei vi vet at blyanten er så stor. Og det vi fikk var ... Eller hva fikk vi i forrige? Vi fikk 400, sånn hele. Hvis vi har plass til cirka 11 i 400, hvis vi setter det opp til 800 som da er ...
> Vetle: 22 cirka. Også setter vi det opp litt til. 1200 det blir da... 33?
> Vetle: Så vi må fjerne noe.
> Peder: Ja, og en er 36, så vi må fjerne litt over 100 for å fjerne alle tre.

4.2.5 Jobbe bakover

Strategien *jobbe bakover* ble som nevnt i innledningen, observert i løsninger sammen med andre strategier. I utdraget under kan vi se elevene jobbe med tilleggsoppgaven i del 1, der de skal modellere en beholder som skal romme 30 blyanter. I løsningen har elevene benyttet seg av strategien *jobbe bakover*, ved at de startet med det ønskede resultatet som var å finne ut hvor stor beholderen skal være innvendig først. I denne situasjonen så er det de innvendige målene som vil ha noe å si for hvor mange blyanter det er plass til. Da de fant ut størrelsen på den innvendige beholderen lagde de enda en beholder som var litt større, slik at de kunne slå de sammen til én beholder. Den første beholderen ble dermed innsiden, og den andre ble utsiden av den endelige beholderen.

> *Akkurat lagd en ny beholder med mål som skal passe til å få plass til 30 blyanter*
> Peder: Men dette må være da det vi skal lage ...
> Vetle: Det er den plassen inni
> Peder: Så må vi lage en til som er litt større

4.2.6 Visuell representasjon

Ettersom oppgavene var utformet ved at elevene jobbet med å modellere en 3D-modell på Tinkercad, kan det argumenteres for at strategien *visuell representasjon* har blitt brukt av elevene i hele prosessen. Vi ser derfor på *visuell representasjon* som en overordnet strategitype til den første delen av dette undervisningsopplegget, der oppgavene i del 1 går ut på å modellere en visuell modell av beholderen deres. Strategien vil derfor bli benyttet av elevene så lenge de modellerer en beholder. Derfor har vi heller gjort rede for hvordan elevene har brukt de visuelle modellene sammen med de andre strategiene, som kommer frem i beskrivelsen til flere av utdragene.

4.3 Funn del 2

I dette kapittelet vil det bli presentert funn fra analysen av den andre delen av undervisningsopplegget. Det er også verdt å nevne at modellene elevene modellerte i den første delen har blitt 3D-printet av oss, og de har fått disse tilbake når de jobber med oppgavene i denne delen. Kapittelet følger samme struktur som den første delen, og vil være strukturert etter de ulike problemløsningsstrategiene.

4.3.1 Logisk resonnement

Problemløsningsstrategien *logisk resonnement* er også den strategien med flest forekomster i den andre delen av undervisningsopplegget. I utdraget under jobber gruppe 1 med oppgave 3a). Gruppa tenkte at når alle sidene i ett prisme blir dobbelt så store, så dobler volumet seg. De fikk det derimot ikke til å stemme når de regnet ut volum, og har stått fast på hva som er feil. Johan velger å holde de to beholderne inntil hverandre for å vise at når alle sidene dobler seg, vil figuren bli større enn dobbelt så stor. Strategien *logisk resonnement* kommer frem ved at de har resonnert seg frem til at utregningen deres stemte allikevel, og at volumet blir mer enn dobbelt så stort.

> Johan: Nei for det tar jo ikke og dobler seg. For hvis det hadde dobla seg hadde det jo bare vært den pluss en boks til. *Viser ved å ta de to beholderne inntil hverandre* Da hadde det dobla seg. Men siden den tar bredden og lengden så ...
> Ole: Så det var svaret? 672?

Videre skal gruppe 1 jobbe videre med oppgave 3c), og finne ut hvor mange blyanter de får plass til i de nye beholderne der alle sidene er doblet. Istedenfor å regne ut volum, og bruke den samme strategien som de brukte i den forrige undervisningsøkten velger de nå å bare multiplisere antall blyanter de har plass til i det gamle prismet med åtte. Strategien *logisk resonnement* blir benyttet ved at elevene først har resonnert seg frem til at når alle sidelengdene dobles så vil volumet bli åtte ganger så stort. Deretter trekker de en konklusjon basert på den informasjonen de har fra det originale prismet, som de bruker for å komme frem til en strategi for å finne ett svar på problemet.

> Johan: Det er jo bare å gange blyantene med...
> Ole: Mhmm, hvor mange var det plass til i denne?
> Johan: Den var det ... 4*5?
> Ole: 20?
> Johan: 4*5, ja det var det for det var litt plass igjen.
> Ole: Så 20 ganger 8?

Gruppe 2 benytter seg også av *logisk resonnement* når de jobber med oppgave 2a). Elevene jobber i utdraget under med å finne ut hvor mange blyanter de får plass til i det oppskalerte prismet. Gruppa sier at de ikke har nok blyanter til å fylle prismet slik de gjorde med det minste prismet, og må derfor tenke litt annerledes. De velger å se hvor mange blyanter de trenger for å fylle halvparten av beholderen. Peder forklarer at han har god plass til 9 blyanter i halvparten av beholderen, og mener det vil være ekstra plass til minst 2 blyanter til dersom de fyller begge halvpartene med 9 blyanter. Peder argumenterer derfor for at det vil være plass til ca. 20 blyanter totalt i hele beholderen. Strategien *logisk resonnement* er tatt i bruk ved at de har brutt problemet ned i mindre deler, der de først har fokusert på hvor mange blyanter halve beholderen rommer. Dermed har de brukt denne informasjonen til å resonnere seg frem til hvor mange blyanter beholderen vil romme totalt. De bruker beholderen som en fysisk representasjon, der de velger å fylle den fysiske beholderen med blyanter.

> Peder: Hvis vi setter de sånn her ... *Legger blyantene i rader på 4 og 4 så de dekker rundt halvparten av beholderen* Får vi plass til kanskje ... Okei 9. Ja jeg tror sånn ca... Ja 20. Jeg har jo god rom her for 9 til, og sikkert sånn 2 til. For jeg fikk 9 sånn her.
> Vetle: Ja, 20 okei.

Når gruppe 2 jobber med oppgave 3a) bruker de igjen strategien *logisk resonnement* for å komme frem til et svar på oppgaven. Utdraget under er fra en diskusjon mellom Vetle og Peder, som diskuterer hvor stort volumet på beholderen deres blir dersom de dobler alle sidelengder. De diskuterte først om beholderen vil få plass til dobbelt så mange blyanter dersom alle sidelengdene dobles, men Peder får det ikke helt til å stemme. Peder resonnerer seg frem til at volumet vil bli mer enn bare dobbelt så stort om de dobler alle sidelengder. Han argumenterer for dette ved at når de gjør alle sidene større så vil volumet bli mer enn dobbelt så stort, på grunn av at alle sidelengdene vil ha en innvirkning på det endelige volumet. Peder bruker hendende fysisk for å få frem dette poenget til Vetle, der han gestikulerer med hendene for å forklare Vetle hva mener når han sier «det» blir større.

> Vetle: Så 26 blyanter hvis vi dobler?
> Peder: Jeg tror ikke det har den sammenhengen, at hvis vi bare dobler alle målene så får den plass til dobbelt så mange. Jeg tror ikke det. Siden den blir jo større sånn her *viser med hendene at han refererer til bredden*. Den blir ikke bare større sånn *viser med hendene at han refererer til lengden*.
> Peder: Kanskje om vi bare hadde doblet den ene sidelengden ville det hatt den sammenhengen, men siden vi doblet alle sidene og høyden så får vi litt mer volum.

4.3.2 Forenkle problemet

På samme måte som i del 1 var *forenkle problemet* den strategien som forekom nest flest ganger i del 2. I utdraget under jobber elevene med oppfølgingsoppgaven til tilleggsoppgaven som ble gitt til gruppe 2. Beholderen de lagde i del 1 fikk ikke plass til 30 blyanter, derfor skal de endre på og modellere en ny beholder som skal romme 30 blyanter. De går frem ved at de først finner det totale volumet de trenger for at beholderen skal romme 30 blyanter. Deretter finner de sidelengdene på beholderen, som multiplisert med hverandre skal bli det totale volumet. Det totale volumet de regnet seg frem til var 189cm^3. Elevene *forenklet problemet* ved at de rundet opp volumet til et helt tall, slik at det skulle bli lettere å regne ut. Volumet ble rundet opp til 200cm^3.

> Peder: Vi kan kanskje ta noe som blir nærme. Hvis vi runder opp til 200 vet vi at vi får litt plass og at det er litt rom igjen. Da blir det kanskje litt lettere. Men jeg vet ikke om vi må ha 17,5 som høyde, siden det er høyden av blyanten. Ødelegger det da volumet eller noe sånt?»
> Vetle: «Jeg vet ikke jeg»

I utdraget under jobber elevene på gruppe 2 med tilleggsoppgaven, og Peder forklarer for Vetle hvordan han har tenkt når han har regnet ut grunnflaten til blyanten. Peder forklarer at han har regnet grunnflaten av blyanten ved å ta side ganger side, i stedet for å regne ut arealet av en sekskant. Det reflekteres også rundt at arealet blir litt større og at det derfor er litt rom imellom. Elevene synes det er utfordrende å regne og beregne antall blyanter det er plass til, og *forenklet problemet* ved at det er lettere å regne ut arealet av et kvadrat enn en sekskant.

> Peder: Siden jeg regnet ut sånn, den her er en, et firkant eller et kvadrat. Siden det er 0,6 x 0,6 også volumet da, så ja det burde få plass. Siden da har vi litt rom imellom. Det burde være riktig

4.3.3 Se fra en annen synsvinkel

I utdraget under jobber elevene med oppgave 2a), og har akkurat fått utdelt to formlike prismer. Det ene prismet er det de lagde sist, mens det andre er det samme bare skalert opp i størrelse. De bestemmer seg for å finne ut hvor mange blyanter det oppskalerte prismet rommer. De velger å legge alle blyantene i det fysiske oppskalerte prismet for å telle hvor mange det er plass til. De trekker frem at de ikke har nok blyanter til å fylle beholderen, og bruker strategien *se fra en annen synsvinkel* der de endrer perspektiv på problemet. Johan forklarer at de kan ta ut alle blyantene de har lagt i beholderen, og heller bruke de fysiske blyantene for å se hvor mange de får plass til langs sidekantene. Deretter multipliserer de antall blyanter de får plass til langs bredden og lengden med hverandre, slik at de finner ut hvor mange det er plass til totalt.

> Johan: Vi tar alle ut, og så sjekker vi en side. Også ganger vi ... du vet sånn gangegreier?
> Ole: Gangegreier?
> *Begynner å legge blyanter langs sidekantene og teller*

I utdraget under jobber elevene i gruppe 1 med oppgave 2a), og gruppa har stått fast på hvordan de skal finne størrelsesforhold mellom de to beholderne. Kommer så med ett forslag om å fylle den minste beholderen med vann, og se hvor mange ganger de kan helle vannet fra den minste til den store beholderen. De forklarer at dette var noe de hadde gjort dagen før, for å se forholdet mellom størrelsen på volumet på en pyramide og en kube. Strategien *se fra en annen synsvinkel* kommer frem ved at de endrer perspektiv på et problem de har stått fast på. Elevene nevner tidligere erfaringer til ett lignende problem, og knytter den tidligere kunnskapen til problemet de står fast på nå. Derfor kan utdraget under også identifiseres som *logisk resonnement.*

> Ole: Vi hadde sånne 3D-modeller i går, og da hadde den ene gruppa sånne trekanter og en firkant, og da greide vi å regne ut at hvis vi fylte opp trekanten tre ganger og helte oppi var det akkurat lik
> Johan: Derfor tror vi at, også kanskje ikke tre ganger, kanskje litt fler
> Ole: Litt fler
> Johan: Men da må vi jo bruke vann oppi disse (blyantholderen).
> William (Observatør): Dere kan gjerne prøve det, hvis dere vil det.

4.3.4 Jobbe bakover

En annen strategi som ble synlig i del 2 av undervisningsopplegget var *jobbe bakover.* I det neste utdraget jobber gruppe 1 med oppgave 2a), og de har akkurat brukt den minste beholderen til å fylle opp den oppskalerte beholderen med vann. De fant ut at de kan helle vann fra den minste beholderen fem ganger, før den oppskalerte blir full. Elevene fant ut hva størrelsesforholdet var, men vet ikke hva volumet på noen av beholderne er. For å sjekke om svaret deres stemmer er de nå ute etter å finne ut hva volumet av de to beholderne er. Strategien *jobbe bakover* blir synlig ved at de allerede vet hva forholdet mellom de to beholderne er, og bruker denne informasjonen for å finne volumet av beholderne. De forklarer at de kun trenger å finne volumet til én av beholderne for å finne volumet av begge to.

> Ole: Så den her er 5 ganger mindre volum?
> Johan: Ja, og den er 5 ganger mer. Så vi må bare finne volumet av den, eller den. Da bruker vi linjal.

Et annet tilfelle ved at elevene benytter seg av strategien *jobbe bakover* blir synlig når gruppe 2 jobber med ekstraoppgaven de har fått utdelt. Der ser de på beholderen de lagde som skulle romme 30 blyanter. Når de fikk den tilbake og skulle verifisere svaret, fant de ut at det de hadde gjort sist ikke stemte. I utdraget under jobber de med å modellere beholderen på nytt, og prøver å finne lengden på sidelengdene og høyden for at beholderen skal romme 30 blyanter. Gruppa *jobber bakover* ved at de først finner ut hvor mye volum 30 blyanter vil trenge, og at høyden til beholderen må være 17,5cm for at den skal være høy nok til å ha plass til blyantene. Peder forklarer at de derfor må finne to ukjente sider de kan multiplisere med høyden, slik at de får alle målene de trenger til å modellere beholderen.

> Peder: 6,3 er volumet av en blyant, med høyde på 17(cm), så vi må bare få plass til, ganger 30 da (…) 189. Så må være noe som blir 189 da, i volum
> Vetle: Ja
> Peder: Det må være ganget med 17,5 som er høyden. (…)
> Peder: Vi må få det ned til noe som blir «noe» ganger «noe» ganger 17,5 blir 189.

4.3.5 Gjett og sjekk

Strategien *gjett og sjekk* hadde også noen forekomster i del 2. I utdraget under jobber elevene med oppgave 3c), hvor de skal finne ut hvor mye større volumet i prismet blir hvis alle sidene blir doblet i lengde. Før dette utdraget har elevene funnet ut at beholderen som hadde blitt skalert opp, var fem ganger så stor som den beholderen de lagde i del 1. Elevene regnet ut volumet til den lille beholderen (84), og beholderen som hadde doblet lengdene, som ble 672. Nå hadde de volumet til den store beholderen og den lille. For å finne forholdet begynte Ole å multiplisere volumet til den lille beholderen og multipliserte seg oppover fra 84 x 4 til 84 x 8. De benyttet seg av strategien *gjett og sjekk* ved at de først gjettet at forholdet var fire ganger så stort, men sjekket at det ikke stemte. Derfor måtte de prøve seg videre med fem, seks og til slutt åtte, hvor de kom frem til 672 til slutt.

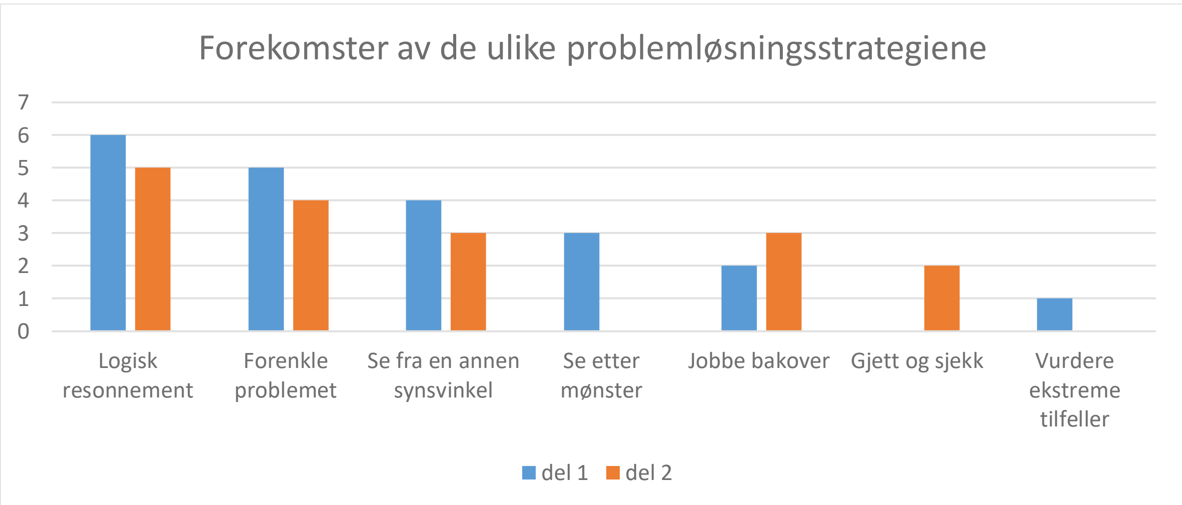
> *Fant at det store prismet de hadde fått utdelt var 5 ganger så stort*
> Ole: Når vi doblet denne her, hva ble svaret da?
> Johan: 84 og 672, (…)
> Ole: Så det var 84 x 4
> *Fortsetter å prøve seg frem med å gange volumet til det lille prismet med 4, 5, 6 og til slutt 8*
> Ole: Så den her ble, når vi doblet denne her ble den 8 ganger større, volumet. Og den der ble 4

I utraget under jobber elevene på gruppe 2 med å endre beholderen som de lagde i del 1, som skulle romme 30 blyanter. I den nye beholderen har de regnet ut hvor stort det totale volumet skal være, men vet ikke sidelengdene. For å finne disse sidelengdene benytter de seg av *gjett og sjekk.* Dette gjør de ved at de prøver seg frem med forskjellige mål på lengde og bredde. Høyden har de satt til 17,5, som er det samme som lengden på blyanten. Peder prøver seg med forskjellige tall, han begynner med 2 x 4 (lengde og bredde), og får da 140cm^3. Videre prøver han 3 x 4, og får 210cm^3, som er for mye. Nå prøver han 2.5 x 3 som akkurat er litt for lite, og prøver seg frem til han finner ut at 2,7 x 4 x 17,5 er akkurat 189cm^3. Ettersom de *gjetter og sjekker* seg frem til sidelengdene utfra ett volum de allerede har funnet ut, benytter de seg også av problemløsningsstrategien *jobbe bakover*. En mer «naturlig» tilnærming ville muligens være å finne sidelengdene på beholderen, før de hadde regnet ut volumet. Derfor kategoriserer vi utdraget under innenfor både *gjett og sjekk* og *jobbe bakover.*

> Peder: 122, hvis vi tar noe med 2 ganger 4. 140, 3. 210, så hvis vi tar 2,5 ganger 4, ganger. 175. 2,7 nå, for å få sånn akkurat ganger 4 ganger 17,5. 189 akkurat.
>
> Vetle: Ja ok, så du fant det.
>
> Peder: så 2,7x4x17,5 blir da 189.

4.4 Oppsummering av funn

I tabellen under vil det bli presentert en oppsummering av resultatene. Tabellen inneholder antall ganger de ulike problemløsningsstrategiene forekommer i løpet av del 1 og del 2. For eksempel forekommer logisk resonnement 6 ganger i del 1, og 5 ganger i del 2.



Figur 11: Forekomster av de ulike problemløsningsstrategiene

I den første undervisningsøkten ble ikke alle de ti strategiene som ble presentert i rammeverket identifisert. Ettersom vi ønsket å undersøke hvilke strategier som ble brukt av elevene, ville det være en mulighet for at alle strategiene ikke ble brukt. Derfor har vi kun presentert de strategiene som ble brukt av elevene. Disse strategiene er: *Logisk resonnement, forenkle problemet, se fra en annen synsvinkel, se etter mønster, jobbe bakover.* Flere strategier blir også identifisert og kategorisert i kombinasjon med andre strategier. Ett eksempel på dette er problemløsningsstrategien *vurdere ekstreme tilfeller,* som er grunnen til at denne strategien ikke har en egen rubrikk. Strategiene som ikke ble tatt i bruk av elevene var: *organisere datamaterialet* og *gjøre rede for alle muligheter.*

I den andre delen av undervisningsøkten ble heller ikke alle de ti strategiene brukt av elevene i arbeidet med oppgavene. Når elevene jobbet med disse oppgavene, hadde vi 3D-printet modellene gruppene lagde i den første delen. Strategiene som ble presentert i del 2 var: *Logisk resonnement, forenkle problemet, se fra en annen synsvinkel, se etter mønster, jobbe bakover* og *gjett og sjekk.* Strategiene som ikke ble tatt i bruk var *se etter mønster, organisere datamaterialet, vurdere ekstreme tilfeller* og *gjøre rede for alle muligheter*

Elevene bruker mange av de samme strategiene i del 1 og del 2. Det er bare noen få forskjeller ved at *se etter mønster* forekommer i del 1, men ikke i del 2, og at gjett og sjekk ikke forekommer i del 1, men forekommer i del 2. Videre kan vi se at strategiene som ikke forekommer i det hele tatt, stort sett er de samme i begge delene. Unntakene er *se etter mønster* og *vurdere ekstreme tilfeller* som kun forekommer i del 1, og *gjett og sjekk* som kun forekommer i del 2.

5.0 Diskusjon

Hovedpoenget med denne studien har vært å besvare de to forskningsspørsmålene: *«Hvilke beholdere lager elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?»* og *«Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?».* I dette kapittelet vil vi diskutere forskningsspørsmålene i lys av tidligere forskning og teori, og også drøfte hvilke begrensninger som er knyttet til denne studien. Kapittelet vil være strukturert i fire delkapitler. I det første delkapitlet vil vi diskutere rundt de ulike beholderne elevene har modellert. Deretter vil vi drøfte hvilke problemløsningsstrategier elevene har benyttet seg av i arbeidet, og hvordan elevene har brukt de ulike strategiene. I det tredje delkapitlet vil vi diskutere hvilken betydning 3D-printing har hatt for hvordan elevene har brukt strategiene. Til slutt vil vi diskutere potensielle begrensninger for denne studien.

5.1 Beholdere

I denne delen av diskusjonen skal vi se på elevenes beholdere som er løsninger på oppgavene som ble gitt i del 1 og del 2 av undervisningsopplegget. Vi vil se på hvordan oppgavene legger opp til at det blir modellert ulike beholdere, og se på beholderens funksjon og utseende.

5.1.1 Ulikt utseende på beholderne

I resultatene blir det presentert bilder av beholderne elevene lagde som besvarelser på oppgavene gitt i del 1 av undervisningsopplegget (jf. Figur 9 og 10). På disse bildene kan vi se at det er stor variasjon i størrelse og utseende på beholderne. En mulig årsak til dette kan være oppgaven i seg selv. Som beskrevet i metodekapittelet har vi utformet en rik-oppgave, der elevene skulle møte på ulike problemer. Ifølge Hedrén et al. (2005) bør et problem kunne løses på flere ulike måter, ved hjelp av ulike strategier og representasjoner. I vår oppgave ba vi elevene om å lage en blyantbeholder med formen til et rett firkantet prisme. Selv om dette begrenser variasjonen i elevenes svar ved å fastsette formen, gir oppgaven fortsatt rom for kreativitet og personlige uttrykk. Elevene har nemlig muligheten til å utforme beholderne på forskjellige måter basert på deres egne ideer og prioriteringer. Det kan tyde på at oppgaven oppfordrer til mangfold i løsningsforslag, der elevene kan modellere beholderen på ulike måter.

5.1.2 Beholderens funksjon

Når vi ser på de fysiske beholderne som elevene modellerte i del 1 av undervisningsopplegget, kan vi argumentere for at gruppe 2 sin beholder er en bedre konstruksjon og mer egnet som blyantbeholder i praksis. Dette skyldes at den har tykkere vegger og en stødigere base, noe som gjør den mer solid. Beholderen til gruppe 1 derimot, hadde bare plass til én blyant og er ustabil på grunn av sin størrelse.

I konstruksjonismen legges det vekt på at læring skjer når elever aktivt konstruerer kunnskap gjennom å skape og modellere objekter i den fysiske og digitale verden (Papert & Harel, 1991). I denne sammenhengen kan forskjellene i størrelse og utseende på blyantbeholderne ses som et resultat av elevenes samspill med hverandre, og verktøyene og materialene de bruker. Når elevene arbeider med å modellere og lage blyantbeholdere i tråd med en konstruksjonistisk *making*-kultur, får de muligheten til å utforske og eksperimentere med ulike løsninger basert på deres egne ideer, interesser og prioriteringer (Hughes et al., 2017). Dette kan føre til at elevene utvikler forskjellige blyantbeholdere som både er funksjonelle og utseendemessig varierte. Beholderens funksjon, som størrelse og utseende, kan dermed knyttes til konstruksjonismen ved at hver elev skaper en unik løsning basert på deres egne erfaringer, preferanser og kreativitet. I tillegg kan variasjonene i beholderens funksjon også sees som et resultat av samarbeidet og diskusjonen mellom elevene. Konstruksjonismen vektlegger viktigheten av å arbeide sammen og dele ideer og erfaringer for å fremme læring og forståelse (Ackermann, 2001). Dermed kan beholdernes funksjon og utseende være et resultat av den kollektive kunnskapen og diskusjonene som oppstår i gruppearbeidet, noe som igjen kan ha bidratt til en rikere og mer variert modellering av blyantbeholderne.

5.2 Problemløsningsstrategier

Corum og Garofalo (2015) argumenterer for at arbeid med 3D-printing ga elever gode muligheter til å utvikle strategier i arbeid med overflateareal, og det kan tyde på at dette også gjelder når elevene jobber med volum av tredimensjonale objekter i denne studien. I arbeidet med opplegget bruker elevene flere typer problemløsningsstrategier når de jobber med volumet av beholderne de har laget. Strategiene *logisk resonnement, forenkle problemet, se fra en annen synsvinkel, se etter mønster, jobbe bakover, vurdere ekstreme tilfeller og gjett og sjekk* blir alle identifisert når elevene jobber med volum av beholderne deres. Elevene jobbet i dette prosjektet med ett undervisningsopplegg som gikk over to undervisningsøkter. I dette kapitlet vil vi diskutere de ulike problemløsningsstrategiene elevene har brukt i arbeidet, og hvilken betydning 3D-printing har hatt for hvordan elevene i denne studien har brukt strategiene.

5.2.1 Logisk resonnement

I resultatkapitlet kom det frem at *logisk resonnement* var den strategien som ble mest brukt av elevene når de jobbet med undervisningsopplegget. Dette kan det være ulike grunner til. Posamentier og Krulik (2008) trekker frem at en ofte er avhengig av *logisk resonnement* i hverdagslige situasjoner, og det kan argumenteres for at dette er en av grunnene til at elevene har brukt denne strategien mest i deres arbeid. Ettersom undervisningsopplegget er utformet som ett virkelighetsnært problem, kan det derfor være naturlig for elevene å bruke *logisk resonnement* for å komme frem til ett svar. Det kan også argumenteres for at ordlyden og utformingen til oppgavene vil ha en innvirkning på hvilke strategier som blir brukt av elevene. Ettersom nesten alle oppgavene har med setningen «vis hvordan dere tenker», kan dette være med på at elevene forklarer hva de gjør, diskuterer sammen og validerer om svaret er riktig.

Logisk resonnement blir brukt av elevene på ulike måter. Ole og Johan bryter problemet ned i mindre deler, og bruker informasjonen for å trekke en logisk slutning ved at de kun trenger å finne arealet av en sideflate. Denne måten å forstå *logisk resonnement* gjenspeiles av Bronkhorst et al. (2020) som argumenterer for at det handler om å trekke ut og koble sammen informasjon om problemet for å danne konklusjoner. Vetle og Peder har også en tilsvarende tilnærming til oppgave 1b), der de bryter ned problemet ved at de kun fokuserer på bunnen av beholderen når de skal finne ut av antall blyanter beholderen rommer. Noe annet som er felles for hvordan gruppene bruker *logisk resonnement*, er at det ofte blir brukt i startfasen når elevene skal finne ut hvordan de skal angripe problemet. Vi argumenterer derfor for at måten elevene bruker *logisk resonnement* i denne studien kan knyttes til den første fasen i Pólya (1945) sin modell, som handler om å forstå problemet. Ifølge læreplan for matematikk handler problemløsning om å utvikle en strategi for å løse ett problem de ikke kjenner fra før, og strategiene skal legges mer vekt på enn selve løsningen (Kunnskapsdepartementet, 2019). Viktigheten av å forstå problemet for å løse det understrekes av Pólya (1945) og når elevene jobber med 3D-printing kan derfor *logisk resonnement* ses på som en strategi som gir elevene mulighet til å komme i gang med problemet. Enten for å løse problemet, eller som en metode for å finne en strategi eller fremgangsmåte for hvordan de best kan angripe problemet.

5.2.2 Forenkle problemet

Problemløsningsstrategien *forenkle problemet* er også en av de strategiene som blir mest brukt av elevene i deres problemløsning. I begge delene av undervisningsopplegget kommer det frem at elevene *forenkler problemet* når de prøver å finne ut hvor mange blyanter beholderen deres har plass til. Posamentier og Krulik (2008) trekker frem at strategien *forenkle problemet* er effektiv når problemet fremstår komplekst eller forvirrende, med mye informasjon. Det kan tyde på at elevene synes det er utfordrende å finne ut hvor mange blyanter de 3D-printede beholderne deres skal romme. Dette kan skyldes at blyantene elevene tok utgangspunkt i er formet som sekskanter, og begge gruppene trekker frem at det er vanskelig å regne ut volumet av blyantene. Elevene bruker også *forenkle problemet* ved at de endrer på tall og mål, for å gjøre utregningene enklere. Det vil si at elevene tilpasser problemet slik at det blir enklere å forstå og løse, uten å fjerne essensen av problemet (Posamentier & Krulik, 2008). Det kan argumenteres for at programmet Tinkercad er med på å legge til rette for at elevene enkelt kan tilpasse og endre mål på 3D-modellen, slik at det blir hele tall og enklere å regne volum og overflateareal. Dermed kan dette også være en grunn til at strategien *forenkle problemet* er en av de strategiene som blir mest brukt.

5.2.3 Se fra en annen synsvinkel

Problemløsningsstrategien *se fra en annen synsvinkel* blir identifisert i begge delene av undervisningsopplegget, og blir hovedsakelig brukt av elevene til å endre perspektiv når de står fast på ett problem. Ifølge Posamentier og Krulik (2008) viser strategien *se fra en annen synsvinkel* først sin styrke når man står fast i problemløsningen, og dette henger sammen med hvordan elevene har brukt strategien når de jobbet med undervisningsopplegget. I kjerneelementet utforsking og problemløsning blir det trukket frem at problemløsning også handler om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er riktige (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vi argumenterer for at problemløsningsstrategien *se fra en annen synsvinkel* vil være en måte for elever å omforme problemet, som gir de mulighet til å komme seg videre i løsningsprosessen om de står fast. For eksempel ved at gruppe 1 endrer perspektiv ved å dele opp underflaten på blyanten i enklere former, eller når gruppe 2 velger å kun ta utgangspunkt i bunnen av beholderen for å finne ut hvor mange blyanter de får plass til. Det kan tyde på at de omformer og endrer perspektiv for å gjøre det enklere å forstå problemet. Det kan derfor argumenteres for at problemløsningsstrategiene *se fra en annen synsvinkel* og *forenkle problemet* kan knyttes opp mot hverandre, med tanke på hvordan de blir brukt av elevene imens de jobber med undervisningsopplegget og 3D-printing.

5.2.4 Jobbe bakover

Elevene bruker problemløsningsstrategien *jobbe bakover* i arbeidet med undervisningsopplegget der de jobber utfra en ønsket konklusjon. Dette stemmer overens med hvordan Croy (2000) argumenterer for at den generelle strukturen rundt å *jobbe bakover* handler om å jobbe seg fra en ønsket konklusjon til premissene for konklusjonen. Ett eksempel på dette er når Vetle og Peder først finner ut hvor stort volum 30 blyanter vil trenge, og bruker denne informasjonen for å finne sidelengdene på beholderen. Ettersom de allerede vet høyden på beholderen er det kun 2 sider som gjenstår for å få premissene for konklusjonen til å stemme overens med den ønskede konklusjonen. Vi argumenterer også for at problemløsningsstrategien *jobbe bakover* kan knyttes til hvordan elevene jobber med 3D-modellen på Tinkercad. Elevene har modellert en ønsket beholder på datamaskinen, og må dermed visualisere hvordan denne vil se ut som ferdig printet fysisk modell. Premissene for at den 3D-printede fysiske beholderen vil se ut som de har diskutert i virkeligheten vil kun stemme dersom elevene visualiserer seg frem til riktige mål og størrelse. Huang og Lin (2017) argumenterer for at prosessen med å gå frem og tilbake mellom design og konkret kan hjelpe med å utvikle ferdigheter i visualisering, og forbedre elever sine ferdigheter til å forutse hvordan det tiltenkte objektet vil se ut i virkeligheten. Dette kan være en mulighet for at elevene brukte problemløsningsstrategien *jobbe bakover* oftere når de jobbet med del 2 av undervisningsopplegget. Der hadde de fått tilbake den fysiske beholderen de hadde laget, og det kan tyde på at elevene fikk bedre forutsetninger til å forutse hvordan de nye tiltenkte beholderne de skulle modellere ville se ut i virkeligheten.

5.2.5 Andre problemløsningsstrategier

Problemløsningsstrategiene *se etter mønster* og *gjett og sjekk* ble også benyttet av elevene, og disse strategiene hadde forekomster i hver sin del av undervisningsopplegget. Disse strategiene ble sjeldent brukt alene, da de ble brukt av elevene i kombinasjon med andre strategier. I del 1 blir problemløsningsstrategien *se etter mønster* identifisert i kombinasjon med *logisk resonnement.* Torkildsen (2017) argumenterer for at å *se etter mønster* ofte blir brukt i kombinasjon med andre strategier, og det kan tyde på at elevene brukte *logisk resonnement* for å gjenkjenne og benytte seg av ulike mønstre i problemløsningsprosessen. Problemløsningsstrategien *gjett og sjekk* blir identifisert i del 2 der elevene prøver å gjette og sjekke seg frem til en endelig konklusjon. For eksempel når gruppe 2 prøver å finne ut hvor store sidelengdene på beholderen skal være utfra ett ønsket volum. I dette eksempelet blir *gjett og sjekk* brukt i kombinasjon med problemløsningsstrategien *jobbe bakover,* og det kan tyde på at elevene gjetter og sjekker seg frem til at premissene for at en ønsket konklusjon skal stemme. Problemløsningsstrategien *vurdere ekstreme tilfeller* ble også identifisert når gruppe 1 endrer beholderen til at den kun skal ha plass til én blyant. Denne strategien ble også kategorisert i kombinasjon med andre strategier, der vi også har kategorisert observasjonen ved at det er en måte å *forenkle problemet* og *jobbe bakover.* Det kan derfor tyde på at når elevene jobber med 3D-printing, får de mulighet til å ta i bruk flere ulike problemløsningsstrategier og også bruke flere strategier i kombinasjon med hverandre.

5.2.6 Problemløsningsstrategier som ikke ble brukt

Det var også noen problemløsningsstrategier som ikke hadde noen forekomster i elevenes arbeid med undervisningsopplegget. Strategiene *organisere datamaterialet* og *gjøre rede for alle muligheter* ble ikke identifisert i analysen, og dette kan det være noen ulike grunner til. For det første vil utformingen og ordlyden av oppgavene ha en betydning for hvilke strategier elevene benytter seg av. F.eks. med tanke på å *organisere datamaterialet* tilrettelegger ikke oppgavene for at det er noe særlig datamateriale å organisere. Elevene jobber med volum og overflateareal av beholderen de har 3D-printet, og disse har klare og tydelige mål og størrelser. For det andre kan det være en mulighet for at elevene ikke har noe særlig trening eller har brukt noen av disse strategiene i noen stor grad tidligere. Dermed er det også en mulighet for at disse strategiene ikke er en del av elevenes *verktøykasse* når de møter på nye problemer (Schoenfeld, 2016).

5.3 3D-printing sin betydning for elevenes bruk av strategier

I undervisningsopplegget jobbet elevene med en RIK-oppgave med 3D-printing, og det er grunn til å tro at dette har hatt implikasjoner for hvilke problemløsningsstrategier elevene har benyttet seg av i arbeidet. I arbeidet har elevene modellert en beholder, fått tilbake en 3D-printet fysisk modell av det de har modellert, og jobbet med oppgaver til deres egne beholdere. På samme som Berry et al. (2010) forstår vi dette som 3D-printing, og hele prosessen kan minne om det Blikstein (2013) omtaler som en *«learning by making»* tilnærming, der elevene bruker teknologi for å lage prosjekter og uttrykke deres matematiske ideer som noe konkret og virkelig. Hughes et al. (2017) argumenterer for at en *making*-kultur legger til rette for å ta risikoer, å lære av feilene sine, problemløsning og utviklingen av utholdenhet når oppgaver er vanskelig. Vi argumenterer for at en *making*-kultur også vil tilrettelegge for at elever benytter seg av ulike strategier i arbeidet med å uttrykke deres ideer som noe virkelig. Som forklart i teorikapitlet kan *making* ses på som en konstruksjonistisk tilnærming, og i denne rubrikken vil vi derfor drøfte om *making* og konstruksjonismen har hatt noen betydning for hvilke strategier elevene har benyttet seg av.

I resultatkapitlet kommer det frem at flere av problemløsningsstrategiene har blitt benyttet av elevene i kombinasjon med andre strategier. Ett eksempel på dette er strategien *logisk resonnement*. Dette underbygger argumentet ved at elevene bruker strategien som en metode for å finne en strategi eller fremgangsmåte for hvordan de best kan angripe problemet. Strategien *se fra en annen synsvinkel* er en annen strategi som ofte blir brukt av elevene i kombinasjon med en annen strategi. Dette kan henge sammen med at elevene jobber med ulike representasjoner av den samme matematiske ideen, for eksempel ved at de både har en visuell og fysisk representasjon i del 2 av opplegget. Når Ole og Johan jobber med oppgave 2a) bruker de strategien *se fra en annen synsvinkel* ved å bruke den 3D-printede fysiske beholderen til å endre perspektiv på problemet. De tilpasser altså strategien ved at de har en fysisk representasjon som de har lagd selv, og velger å bruke den fysiske beholderen til å finne en løsning på problemet. Enten ved at de fyller beholderen med fysiske blyanter istedenfor å regne, eller ved at de fyller beholderne med vann for å finne forholdet mellom volumet på de to beholderne. Dette kan knyttes til tankene til Papert og Harel (1991) om *nærhet til objekter*, der det kan tyde på at gruppe 1 foretrekker å bruke problemløsningsstrategiene tett opp mot de fysiske objektene når de har disse fremfor seg. Ettersom vi forsøkte å holde rammene så like som mulig i del 1 og del 2 av opplegget, kan dette være med på å underbygge denne argumentasjonen. Forskjellen er at de har fått tilbake de fysiske beholderne de modellerte i den første delen, og flere av problemløsningsstrategiene blir synliggjort i del 2 ved at de bruker de fysiske beholderne i løsningsprosessen. Dersom de hadde hatt fysiske representasjoner å jobbe med i den første delen av undervisningsopplegget, ville dette muligens hatt implikasjoner for både hvilke strategier som ble brukt, og hvordan beholderne ville sett ut.

I del 2 - oppgave 1a) jobber elevene med beholderen de lagde sist, og sammenligner den visuelle representasjonen på Tinkercad med den fysiske beholderen de har fått tilbake. Selv om vi ikke identifiserte noen klare kjennetegn på problemløsningsstrategier i denne prosessen, kan det argumenteres for at de jobber med å se sammenheng mellom de ulike måtene å tenke på. Dette er ett av aspektene i konstruksjonismen, der en går tilbake til problemet og fikser på feil, og rekonstruerer objektet (Papert, 1972). Det kan argumenteres for at hele denne prosessen kan knyttes til strategien *logisk resonnement*, der elevene validerer om beholderen har plass til så mange blyanter de fant ut av i den første delen. Det kan tyde på at når elevene får tilbake den fysiske beholderen og skal reflektere rundt hva som ble feil, får de muligheter til å gå frem og tilbake mellom det todimensjonale og visuelle til det tredimensjonale og fysiske. Dette argumentet underbygges av Huang og Lin (2017) og Smith (2018), som også argumenterer for at 3D-printing kan gi muligheter for elever til å se sammenhengen mellom de ulike måtene å tenke på.

I resultatkapitlet kommer det også frem at de fleste problemløsningsstrategiene som blir brukt av elevene blir identifisert gjennom gruppene sine dialoger. Ng og Ferrara (2020) trekker frem viktigheten av samarbeid i en *making*-kultur, der elever konstruerer matematisk forståelse med andre gjennom kroppsspråk og gestikuleringer i arbeid med objekter de lager. I resultatkapitlet kommer det frem flere eksempler på at elevene peker og gestikulerer, særlig i kombinasjon med strategien *logisk resonnement.* Det kan tyde på at begge gruppene bruker kroppsspråk og gestikuleringer med de visuelle og fysiske representasjonene for å argumentere for problemløsningsstrategiene de benytter seg av og for å hjelpe samarbeidspartneren med å forstå hva de mener. Dette henger sammen med Papert og Harel (1991) sine tanker om at kunnskap blir konstruert når man lager noe og deler det med omverden. Det kan tyde på at når elevene deler og viser frem det de lager til hverandre får de mulighet til å hjelpe hverandre med å forstå problemene og samarbeide for å velge hvilke problemløsningsstrategier de skal benytte seg av. Ettersom elevene jobber sammen i hele prosessen kan det også ha en innvirkning på hvilke strategier som blir benyttet. I Pearson og Dubé (2022) sin litteraturgjennomgang trekker de frem at flere forskere argumenterer for at 3D-printing tilrettelegger for muligheten til at elever lærer å jobbe sammen i team, og bli aktive i sin egen læring (Se f.eks. Trust & Maloy, 2017). I denne studien så vi noen av de samme tendensene i de to gruppene, der elevene samarbeidet rundt strategivalg og diskuterte hvordan de best kunne løse de ulike problemene. Dersom elevene hadde jobbet individuelt med hele opplegget, er det ikke sikkert at de samme strategiene hadde blitt benyttet i arbeidet.

5.4 Begrensninger

I denne rubrikken vil vi løfte frem og drøfte mulige begrensninger ved denne studien. For det første vil det være begrensninger knyttet til metoden vi har valgt for å samle inn data. Ettersom vi kun har observert elever som har gjennomført ett undervisningsopplegg, vil resultatene være preget av en viss grad av subjektivitet fra oss som har observert og analysert. Derfor kan vi ikke med sikkerhet si at vi representerer elevenes absolutte virkelighet, ettersom det er våre tolkninger av hva elevene sier og gjør som kommer frem i denne studien. For å øke muligheten til å sikre at elevenes virkelighet ble representert kunne vi for eksempel gjennomført intervjuer med elevene. På denne måten kunne vi bekreftet våre tolkninger med hva elevene selv mente. Grunnet omfang på masteroppgaven var dette en utfordring, med tanke på at datamaterialet inneholder både lyd og videomateriale. Vi filmet og tok lydopptak av to undervisningsøkter, med to kameraer som gjorde at det ble mye datamateriale å forholde seg til i analysen. På den andre siden har vi vært to personer i hele analyseprosessen, som har gitt oss muligheten til å samarbeide for å forstå datamaterialet. Vi har også hatt tydelige koder som vi begge har brukt for å identifisere de ulike problemløsningsstrategiene, som har gitt oss mulighet til å diskutere og begrunne hvorfor vi kategoriserer observasjonene som vi gjør.

Det vil også være relevant å nevne at elevene ikke har vært i en helt naturlig situasjon når vi har gjennomført undervisningsopplegget. For det første sitter elevene på ett grupperom istedenfor i klasserommet. Det er også kameraer som filmer elevene og mikrofoner som tar opp lyd, som også vil føre til at det ikke er en helt naturlig situasjon for elevene. Dette kan være en mulig begrensning med tanke på overførbarheten til funnene våre og opplegget i sin helhet. Med tanke på at det kun er fire informanter i denne studien vil dette også være en mulig begrensning med tanke på overførbarheten til funnene våre. Mason og Davis (1991) og Torkildsen (2017) trekker frem at et *problem* nødvendigvis ikke vil være et *problem* for en annen, og dette kan bety at andre elever som hadde gjennomført opplegget ville møtt på andre problemer eller ingen i det hele tatt. Dette vil også kunne ha betydning for hvilke problemløsningsstrategier som blir brukt av elevene. Schoenfeld (2016) trekker frem at problemløsningsstrategier sammen med tidligere matematisk kunnskap vil være elever sin *verktøykasse* når de møter på ukjente problemer. Det er grunn til å tro at ulike elever vil ha ulike *verktøykasser,* og dette kan bety at andre elever ville brukt andre problemløsningsstrategier i deres arbeid med undervisningsopplegget.

Ett annet aspekt som vil være verdt å nevne i forhold til begrensninger er tiden det tar å gjennomføre undervisningsopplegget. Ettersom ett av formålene med studien er å gi innsikt i hvordan lærere kan ta i bruk 3D-printing i undervisning, vil tiden det tar å gjennomføre opplegget og printe ut modellene være relevant å belyse. Undervisningsopplegget i sin helhet gikk over to deler som varte i 90 minutter hver. I tillegg tok det imellom 15-18 timer å printe ut beholderne elevene hadde modellert. Dersom en lærer skulle gjennomført dette opplegget med en hel skoleklasse, vil det derfor kreve mye av den begrensede tiden som er disponibel for matematikklærere. På den andre siden legger Torkildsen (2017) vekt på at å jobbe med problemløsning krever tid til å utforske og «leke» med problemet. Elevene som har jobbet med dette opplegget har fått tid til å utforske og benytte seg av ulike strategier og reflektere over det de har gjort. Det kan tyde på at dette tilrettelegger for at elevene får mulighet til å jobbe med deres ferdigheter i problemløsning, der de bruker ulike strategier for å løse ulike problemer.

6.0 Konklusjon

I denne studien har vi tatt utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. *Hvilke beholdere lager elever på 9. trinn i arbeid med en rik oppgave med 3D-printing?*
2. *Hvilke problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing, og hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategiene?*

For å svare på disse spørsmålene har vi observert elever på 9.trinn, som har gjennomført ett undervisningsopplegg vi har utformet selv. Undervisningsopplegget gikk ut på at elevene skulle 3D-printe blyantbeholdere, og jobbe med oppgaver som omhandlet deres modellerte beholdere. For å undersøke hvilke problemløsningsstrategier elevene benyttet seg av, tok vi utgangspunkt i Posamentier og Krulik (2008) sine ti strategityper som analytisk rammeverk. Det andre forskningsspørsmålet er todelt, da det både omhandler hvilke strategier som er brukt og hvilken betydning 3D-printing har hatt for elevenes bruk av strategiene. Vi vil nå forsøke å trekke en konklusjon til de to forskningsspørsmålene, på bakgrunn av vår analyse og hva vi har drøftet i diskusjonskapitlet. Ettersom dette er en kvalitativ studie med få informanter, vil vi være forsiktige med å trekke generaliserbare konklusjoner. Vår forskning preges av de fire informantene som arbeidet med undervisningsopplegget, og det er på bakgrunn av disse informantene konklusjonene vil trekkes utfra.

6.1 Hvilke beholdere laget elevene?

De ulike blyantbeholderne elevene modellerte blir presentert i resultatkapitlet (jf. Figur 9). Det viser at elevene modellerer ulike beholdere når de jobber med en rik-oppgave med 3D-printing. Det kan tyde på at det er flere faktorer som kan spille inn på utseende og funksjonen til beholderne. Samarbeid og diskusjonene til elevene kan være en mulig faktor, og det samme kan utformingen til oppgaven være, med tanke på at den er åpen for flere løsningsforslag.

6.2 Hvilke problemløsningsstrategier benytter elever på 9.trinn seg av?

Når elevene jobber med en rik oppgave med 3D-printing benytter de seg av flere ulike problemløsningsstrategier i møte med ulike problemer. *Logisk resonnement* var den problemløsningsstrategien som ble mest brukt av elevene, og denne strategien ble identifisert 11 ganger totalt. Vi argumenterer for at *logisk resonnement* er en strategi som kan knyttes til hverdagslige situasjoner, som kan være en grunn til at det er den strategien som blir mest brukt. *Forenkle problemet* og *se fra en annen synsvinkel* er også strategier som ble mye brukt av elevene i deres arbeid i begge delene av undervisningsopplegget. Andre strategier som også ble brukt av elevene var *jobbe bakover, vurdere ekstreme tilfeller, se etter mønster* og *gjett og sjekk.*

Det er også noen strategier som ikke blir brukt av elevene i arbeidet. *Organisere datamaterialet* og *gjøre rede for alle muligheter* ble ikke identifisert i analysen. Dette kan det være ulike grunner til, og vi argumenterer for at ordlyd og oppgaven i seg selv vil ha en betydning for hvilke strategier som blir benyttet av elevene. En annen grunn kan være at elevene mangler trening og kunnskap om disse strategiene, og at de derfor ikke er en del av elevenes *verktøykasse.*

6.3 Hvilken betydning har 3D-printing for elevenes bruk av strategier?

Det er grunn til å tro at når elevene jobber med 3D-printing, vil det ha en betydning for hvilke problemløsningsstrategier de benytter seg av og hvordan strategiene blir brukt. Det kan tyde på at faktorer som samarbeid med å modellere beholderne, kroppsspråk og gestikulering med de visuelle og fysiske representasjonene og hvilke representasjoner elevene har tilgjengelig, har en betydning for hvordan elevene bruker problemløsningsstrategiene. Det kan også tyde på at når elevene får utdelt de fysiske 3D-printede modellene de har laget, får de mulighet til å gå frem og tilbake mellom det todimensjonale og tredimensjonale. Dermed kan det også gi elevene muligheter til å se sammenhengen mellom de ulike måtene å tenke på. Vi argumenterer for at hele denne prosessen kan knyttes til *logisk resonnement,* og ett av aspektene i konstruksjonismen som handler om å gå tilbake til problemet, fikse feil og rekonstruere objektet.

7.0 Implikasjoner for lærere og videre forskning

Ved å bruke 3D-printing i arbeidet med problemløsning kan elever få muligheten til å dele matematiske ideer med hverandre og benytte seg av problemløsningsstrategier med visuelle og fysiske representasjoner. Vår studie viser at elever som arbeider med en rik oppgave med 3D-printing, benytter seg av flere ulike problemløsningsstrategier i problemløsningsprosessen. Med tanke på at problemløsning har fått en sentral rolle i læreplan for matematikk (LK20), kan dette gi implikasjoner for hvordan lærere kan jobbe med elevenes ferdigheter i problemløsning. *Logisk resonnement* er en problemløsningsstrategi som har blitt svært synlig i vår studie med de elevene vi har gjennomført undervisningsopplegget med. Selv om vi ikke kan trekke noen generaliserbare konklusjoner, kan det tyde på at å jobbe med ett rikt opplegg med 3D-printing kan være en hensiktsmessig måte for elever å jobbe med *logisk resonnement.*

Studien kan også ha implikasjoner for lærere og skoler med tanke på hvordan 3D-printing kan integreres i matematikkundervisning. I denne studien gis det en grundig gjennomgang av undervisningsopplegget elevene har jobbet med, der vi forklarer ulike valg vi har tatt i prosessen. Vi har også knyttet opplegget opp mot kompetansemål, og flere av kjerneelementene i matematikk. Dette kan bidra som en inspirasjonskilde til hvordan lærere kan utforme opplegg der elever skal benytte seg av teknologien 3D-printing. I vår studie har elevene jobbet med geometri, men vi ser også ett potensiale til at 3D-printing kan anvendes til å jobbe med andre matematiske emner og problemløsning.

I forhold til læreplan for matematikk er en av de sentrale verdiene i matematikkfaget å forberede elever til ett samfunn i utvikling ved å gi de kompetanse i utforsking og problemløsning (Kunnskapsdepartementet, 2019). Å jobbe med 3D-printing kan derfor være en måte å tilrettelegge for at elever tilegner seg kompetanse i problemløsning, der elevene bruker ulike strategier for å løse ukjente problemer. Trust og Maloy (2017) underbygger denne argumentasjonen der de nevner at 3D-printing i undervisning kan være med på å utvikle flere typer *21st century skills,* som problemløsning, kritisk tenking og teknologiske ferdigheter. Szabo et al. (2020) argumenterer også for at å lære bort problemløsningsstrategier i matematikken kan være med på å utvikle ferdigheter i problemløsning som styrker kritisk tenking. Kritisk tenking blir synlig i dette opplegget når elevene skal reflektere over hva som ble feil i forhold til beholderen de laget, og hva som må endres. Gjennom hele opplegget jobber elevene med CAD-programmet Tinkercad og teknologien 3D-printing, og det kan derfor argumenteres for at elevene får mulighet til å utvide og utvikle deres teknologiske ferdigheter. Å jobbe med ett rikt opplegg med 3D-printing i matematikkundervisning kan derfor gi implikasjoner for lærere ved at det kan være med på å forberede elever til ett samfunn i utvikling, der det kan tyde på at det tilrettelegger for å jobbe med 21st century skills som problemløsning, kritisk tenking og teknologiske ferdigheter.

Til videre forskning hadde det vært interessant å se nærmere på 3D-printing og problemløsning. For eksempel kunne vi gjennomført ett opplegg med elever som hadde gått over lenger tid, slik at vi kunne sett nærmere på om 3D-printing kan være med på å utvikle problemløsning og problemløsningsstrategier hos elever. Her kan vi for eksempel foreslå ett kontrollert eksperiment (Postholm & Jacobsen, 2018). Da kunne vi sett om å jobbe med ett rikt opplegg med 3D-printing hadde hatt noen effekt på utviklingen av elevers ferdigheter i problemløsning eller geometri, målt opp mot endringen til en kontrollgruppe som ikke jobbet med 3D-printing.

Det hadde også vært interessant å undersøke læreres perspektiv på hvordan, men også om 3D-printing kan integreres i matematikkundervisning. Både med tanke på muligheter til å jobbe med problemløsning, som har fått en stor rolle i læreplan for matematikk, men også med tanke på at teknologi spiller en større rolle i skolen enn det har gjort tidligere. Det hadde også vært interessant å undersøke hva lærere ser på som begrensninger knyttet til 3D-printing, og hvilke tanker de har rundt å minimere dette som begrensninger. I vår studie har elevene jobbet med geometri, men det hadde også vært interessant å undersøke hvordan 3D-printing kan brukes til å jobbe med andre matematiske emner og problemløsning. Andre teknologiske verktøy knyttet til digital fabrikasjon hadde også vært interessant å undersøke nærmere i sammenheng med problemløsning og undervisning, som for eksempel laserkutter og vinylkutter.

8.0 Referanser

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of learning group publication*, *5*(3), 438. http://www.sylviastipich.com/wp-content/uploads/2015/04/Coursera-Piaget-_-Papert.pdf

Baroody, A. J. & Dowker, A. (2013). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise*. Routledge.

Berry, R. Q., Bull, G., Browning, C., Thomas, C. D., Starkweather, G. & Aylor, J. (2010). Use of digital fabrication to incorporate engineering design principles in elementary mathematics education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *10*(2), 167-172. https://www.learntechlib.org/primary/p/35289/article_35289.pdf

Bicer, A., Nite, S. B., Capraro, R. M., Barroso, L. R., Capraro, M. M. & Lee, Y. (2017). Moving from STEM to STEAM: The effects of informal STEM learning on students' creativity and problem solving skills with 3D printing. 2017 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE),

Blikstad-Balas, M. (2017). Key challenges of using video when investigating social practices in education: contextualization, magnification, and representation. *International Journal of Research & Method in Education*, *40*(5), 511-523. https://doi.org/10.1080/1743727X.2016.1181162

Blikstein, P. (2013). Digital fabrication and 'making'in education: The democratization of invention. *FabLabs: Of machines, makers and inventors*, *4*(1), 1-21. https://ccst.us/wp-content/uploads/pblikstein-democratizinginvention.pdf

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological., 57–71. *Washington, DC, US: American Psychological Association*.

Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C. & Goedhart, M. (2020). Logical Reasoning in Formal and Everyday Reasoning Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(8), 1673-1694. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10039-8

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford university press.

Corum, K. & Garofalo, J. (2015). Using digital fabrication to support student learning. *3D Printing and Additive Manufacturing*, *2*(2), 50-55. https://doi.org/10.1089/3dp.2015.0008

Croy, M. J. (2000). Problem solving, working backwards, and graphic proof representation. *Teaching Philosophy*, *23*(2), 169-187. https://doi.org/10.5840/teachphil200023226

DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in mathematics*, *63*(2), 131-147. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* Den nasjonale forskningsetiske komiteene. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1290797.pdf

Eryilmaz, S. & Deniz, G. l. (2021). Effect of Tinkercad on Students' Computational Thinking Skills and Perceptions: A Case of Ankara Province. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *20*(1), 25-38. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1290797.pdf

Fernandes, S. C. & Simoes, R. (2022). Using 3D Printing as a Strategy for Including Different Student Learning Styles in the Classroom. I *Research Anthology on Makerspaces and 3D Printing in Education* (s. 141-164). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-6684-6295-9.ch008
Ford, S. & Minshall, T. (2019). Invited review article: Where and how 3D printing is used in teaching and education. *Additive Manufacturing*, *25*, 131-150. https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.10.028
Gallagher, A. M. & De Lisi, R. (1994). Gender differences in Scholastic Aptitude Test: Mathematics problem solving among high-ability students. *Journal of Educational psychology*, *86*(2), 204. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.2.204
Hedrén, R., Taflin, E. & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till. *Nämnaren 32 (1)*, 36-41. http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3641_05_1.pdf
Huang, T.-C. & Lin, C.-Y. (2017). From 3D modeling to 3D printing: Development of a differentiated spatial ability teaching model. *Telematics and Informatics*, *34*(2), 604-613. https://doi.org/10.1016/j.tele.2016.10.005
Hughes, J., Gadanidis, G. & Yiu, C. (2017). Digital making in elementary mathematics education. *Digital experiences in mathematics education*, *3*, 139-153. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0020-x
Hwang, W.-Y., Su, J.-H., Huang, Y.-M. & Dong, J.-J. (2009). A study of multi-representation of geometry problem solving with virtual manipulatives and whiteboard system. *Journal of Educational Technology & Society*, *12*(3), 229-247. https://www.jstor.org/stable/pdf/jeductechsoci.12.3.229.pdf
Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. & council, N. r. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Bd. 2101). National Academy Press Washington, DC.
Kit Ng, D. T., Tsui, M. F. & Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education*, *1*(3), 338-358. https://doi.org/10.1177/27527263221129357
Koch, T. (1994). Establishing rigour in qualitative research: the decision trail. *Journal of advanced nursing*, *19*(5), 976-986. https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.1994.tb01177.x
Krassenstein, E. (2014). *Why 3D printing needs to take off in school around the world*. 3Dprint.com The Voice of 3D Prinitng/Additive manufacturing. https://3dprint.com/27743/3dprinting-benefits-schools
Kunnskapsdepartementet. (2017). *Overordnet del - verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/verdier-og-prinsipper-for-grunnopplaringen/id2570003/
Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan for matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Lærerplanverket for kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer
Larson, L. C. (2012). *Problem-solving through problems*. Springer Science & Business Media.
Mason, J. & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Deakin University Press.
McIntosh, R., Jarrett, D. & Peixotto, K. (2000). Teaching mathematical problem solving: Implementing the vision. *Portland, Oregon: Mathematics and Science Education Center, North West Regional Laboratory*.
Medina Herrera, L., Castro Pérez, J. & Juárez Ordóñez, S. (2019). Developing spatial mathematical skills through 3D tools: augmented reality, virtual environments and 3D

printing. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, *13*, 1385-1399. https://doi.org/10.1007/s12008-019-00595-2

Ng, O.-L. & Ferrara, F. (2020). Towards a Materialist Vision of 'Learning as Making': the Case of 3D Printing Pens in School Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(5), 925-944. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10000-9

Ng, O. L. & Chan, T. (2019). Learning as Making: Using 3D computer‐aided design to enhance the learning of shape and space in STEM‐integrated ways. *British Journal of Educational Technology*, *50*(1), 294-308. https://doi.org/10.1111/bjet.12643

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, *3*(3), 249-262. https://doi.org/10.1080/0020739700030306

Papert, S. & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *constructionism*, *36*(2), 1-11.

Pearson, H. A. & Dubé, A. K. (2022). 3D printing as an educational technology: theoretical perspectives, learning outcomes, and recommendations for practice. *Education and Information Technologies*, 1-28. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10733-7

Pólya, G. (1945). How to solve it. Princeton. *New Jersey: Princeton University*.

Posamentier, A. S. & Krulik, S. (2008). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*. Corwin press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Research, H. (2011). *A crosswalk of 21st century skills*. Author Washington, DC. https://www.montgomeryschoolsmd.org/uploadedFiles/about/strategicplan/21stCenturySkills.pdf

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 794-805. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995155

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, *196*(2), 1-38. https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/002205741619600202

Smith, S. (2018). Children's negotiations of visualization skills during a design-based learning experience using nondigital and digital techniques. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, *12*(2), 4. https://doi.org/10.7771/1541-5015.1747

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, *3*, 1-22.

Stigberg, H. (2022). Digital Fabrication for Mathematics Education: A Critical Review of the Field. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12),

Szabo, Z. K., Körtesi, P., Guncaga, J., Szabo, D. & Neag, R. (2020). Examples of problem-solving strategies in mathematics education supporting the sustainability of 21st-century skills. *Sustainability*, *12*(23), 10113. https://doi.org/10.3390/su122310113

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse - En innføring i kvalitative metoder* (Bd. 5). Fagbokforlaget.

Torkildsen, S. H. (2017). Matematisk problemløsing. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/media/filer/MAM/Torkildse

Trust, T. & Maloy, R. W. (2017). Why 3D print? The 21st-century skills students develop while engaging in 3D printing projects. *Computers in the Schools*, *34*(4), 253-266. https://doi.org/10.1080/07380569.2017.1384684

Van Laar, E., Van Deursen, A. J., Van Dijk, J. A. & De Haan, J. (2017). The relation between 21st-century skills and digital skills: A systematic literature review. *Computers in human behavior*, *72*, 577-588. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.03.010

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*, 335-359. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Yin, R. K. (2003). Designing case studies. *Qualitative research methods*, *5*(14), 359-386.

9.0 Vedlegg

I dette kapittelet kommer det en oversikt over vedlegg tilhørende denne masteroppgaven.

9.1 Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet

«Elevers bruk av problemløsningsstrategier i arbeid med 3D-printing»

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se hvilke problemløsningsstrategier elever benytter når de jobber med 3D-printing. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål

I læreplan for matematikk (LK20) har problemløsning fått en stor rolle som del av ett av de seks kjerneelementene i matematikkopplæringen. I tillegg blir dagens skole mer og mer digital, som også gjenspeiles ved at digitale ferdigheter er en av de grunnleggende ferdighetene skolen skal støtte og legge til rette for i opplæringen. Formålet med denne studien er å undersøke hvilke problemløsningsstrategier elever bruker når de arbeider med 3D printing. Vi ønsker derfor å se på hvordan du som elev løser en RIK – oppgave, der du skal lage og printe ut ett tredimensjonalt objekt.

I dette masterprosjektet skal vi besvare følgende forskningsspørsmål:

- Hvilke typer problemløsningsstrategier benytter elevene seg av under en rik oppgave med 3D-printing som verktøy?
- Hvordan fremmer 3D-printing i undervisningsopplegget en problemløsende arbeidsmåte?

Dette forskingsprosjektet er vår masteroppgave ved lærerutdanningen på Høgskolen i Østfold. Med denne masteroppgaven fullfører vi vår lærerutdanning, og blir lektorer i matematikk og blir lærere i ungdomsskolen eller barneskolen.

Funn som blir gjort i denne studien kan bli brukt etter endt masterprosjekt til andre formål i pedagogisk- og undervisningssammenheng. Funnene kan for eksempel bli brukt i undervisning, foredrag eller i artikler som blir publisert i tidsskrifter eller på internett. Opplysningene og funnene som blir brukt vil være anonymisert, og vil ikke kunne spores tilbake til deg som deltaker eller skolen din.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Fakultet for lærerutdanning ved Høgskolen i Østfold er ansvarlig for prosjektet. Vi heter William Mathisen og Simon Molteberg, og er masterstudenter i lærerutdanning ved dette fakultetet, og denne oppgaven er vårt masterprosjekt. Vi har en masterveileder på HIØ som heter Henrik Stigberg. Vi har ansvar for å ivareta deg som deltaker og ivareta dine rettigheter og personopplysninger.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du får spørsmål om å delta i denne studien fordi du som elev på ungdomsskolen har jobbet med matematikk i mange år, og har erfaring med både digitale verktøy og problemløsningsoppgaver. Du vil være en av fire elever som tar del i studien. Vi har fått kontaktopplysninger fra matematikklæreren din.

Hva innebærer det for deg å delta?

Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at vi gjør video- og lydopptak av deg imens du arbeider med en oppgave på pc-en, sammen med en annen. Dere skal samarbeide og snakke sammen når dere løser oppgaven, og fortelle hverandre hva dere tenker og hvilke strategier dere velger å bruke. Dere kommer til å sitte på grupperom å gjennomføre oppgaven. Prosjektet innebærer deltakelse over to økter på 60 minutter.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. Hvis du ønsker å trekke deg kan du kontakte en av oss studenter, og vi vil slette videoopptak og makulere samtykkeskjemaet.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger

Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- De som vil ha tilgang på opplysningene er oss som forskere og studenter, William og Simon, i tillegg til vår masterveileder Henrik Stigberg.
- Det vil være vi som håndterer videokameraene slik at råmateriale fra undervisningsopplegget (videomateriale) kun vil være tilgjengelig for oss, i tillegg vår veileder.
- Samtykkeskjemaene vil bli oppbevart adskilt fra videoopptak, og vil ligge nedlåst og utilgjengelig fra andre enn oss og veileder.

- Deltakere vil ikke kunne identifiseres i publikasjoner, da personidentifiserende opplysninger vil bli anonymisert/fjernet.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes og masteroppgaven er sensurert, noe som etter planen er 30. Mai 2023 1. Videoopptak gjort i intervjuene vil bli slettet. Samtykkebrev vil bli makulert, slik at navn på deltakere ikke kan spores etter endt prosjekt.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Høgskolen i Østfold og Fakultet for lærerutdanning har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Student: *William Mathisen, williawm@hiof.no, +47 94835989*
- Student: *Simon Molteberg, simonmm@hiof.no, +47 906737396*
- *Veiledere: Henrik Stigberg, henrik.stigberg@hiof.no. +47 696 08 256*
- Vårt personvernombud: *Personombud ved Høgskolen i Østfold, Julie Dessen (personvern@hiof.no), +47 95061930*

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

(Forsker/veileder)	Student	Student
Henrik Stigberg	William Mathisen	Simon Molteberg

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet «*Elevers bruk av problemløsningsstrategier i arbeid med 3D-printing»*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg er klar over at jeg når som helst kan trekke tilbake mitt samtykke og at det ikke vil ha noen negative konsekvenser. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i undervisningsopplegget
- ☐ At det blir gjort lyd- og videoopptak av meg

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----

(Signert av prosjektdeltaker og forelder, dato)

9.2 Oppgaven i sin helhet

Lag din egen blyantholder

I denne oppgaven skal dere lage deres egen blyantbeholder i Tinkercad.

Det er viktig at dere diskuterer og snakker sammen, og viser hvordan dere tenker ved å skrive det ned.

Oppgave 1:

Bruk Tinkercad til å lage en 3D-modell av en blyantbeholder med form som ett rett firkantet prisme.

Hvor mange blyanter får dere plass til i prismet? Finn ut, og vis hvordan dere tenker.

Nå ønsker dere å male beholderen deres. Dere bruker 1mL maling per cm^2. Hvor mye maling trenger dere for å male beholderen? Finn ut, og vis hvordan dere tenker.

Oppgave 2:

1. Se på beholderne dere lagde sist gang, og finn ut om utregningene dere gjorde om antall blyanter det var plass til, stemmer overens med det som faktisk er plass til.
   a) Hvorfor ble det riktig/feil?
   b) Fungerer det som en blyantholder?
   c) Hva ville dere gjort annerledes?

2. Se på beholderen som har blitt gjort større.
   a) Hvor mange flere blyanter er det plass til i disse, og hva er forholdet mellom størrelsen til beholderne?
   b) Er det noen sammenheng mellom antall blyanter og størrelsesforholdet? Diskuter sammen.

3. Doble alle lengdene i prismet dere lagde.
   a) Hva tror dere skjer med volumet? Diskuter sammen i gruppa. Finn ut hvor stort volumet blir, og hva som er forholdet mellom volumet på de to prismene.
   b) Hvor mange blyanter får dere plass til i dette nye prismet?

c) Gjelder det for alle prismer hvor sidelengdene dobles? Finn ut og vis hvordan dere tenker.

Til gruppe 2:

Se på beholderen dere laget til oppgaven der dere skulle lage en beholder som rommet 30 blyanter, ble det som dere trodde? Hvorfor/hvorfor ikke?